



guessmaths

Exercice 1 : (02pts)

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel λ , l'ensemble des solutions de l'équation

$$(E): \frac{1}{1+x^{2024}} = \lambda$$

Exercice 2 : (02pts)

On pose : $a = \arctan(\sqrt{2})$.

1)- Justifier que : $0 < \pi - 2a < \frac{\pi}{2}$

2)- Calculer $\tan(\pi - 2a)$, puis en déduire que : $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$

Exercice 3 : (04pts)

Soit $a \in [-3; +\infty[$ et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + a} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{1 + x^3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1) Justifier que : $D_f = \mathbb{R}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.

2) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$ et $]-1; +\infty[$.

3) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (06pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$.

1) Déterminer D_f ; Puis calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité g que l'on précisera.

3) a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle $I =]-\infty; 1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

4)- Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une solution unique dans $]0; 1[$.

Exercice 5 : (06pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x}\right)\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ telle que : $\sqrt[3]{x} = \tan(\alpha)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt[3]{x})$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

4) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)-1}{x}$

Exercices Bonus :

Exercice 1 : (03pts)

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (02pts)

✓ Prouver que la fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}} - \frac{2}{x-1}$ admet en $x_0 = 1$ un prolongement

par continuité g que l'on précisera.

Exercice 3 : (03pts)

Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

✓ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.