



guessmaths

Problème n° 2 étude de fonction ln

Bac SM

Exercice1 (8,5points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; e]$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \sqrt{1 - \ln x} \quad \text{si } 0 < x \leq e \end{cases}$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

3) a) Vérifier que pour tout réel $x \in]0; e[$ on a :
$$\frac{f(x)}{x - e} = \frac{-x}{\sqrt{1 - \ln x}} \times \frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x} - 1} .$$

b) Etudier alors la dérivabilité de f à gauche en e .

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]0; e[$ et que : $(\forall x \in]0; e[) ; f'(x) = \frac{x(3 - 4 \ln x)}{2\sqrt{1 - \ln x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe

5) Soit α un réel de l'intervalle $]0; e[$.

On se propose de déterminer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C_f autour de l'axe des abscisses,

a) Montrer que si g est une fonction continue sur $[0; e]$ alors : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^e g(x) dx = \int_0^e g(x) dx$.

b) A l'aide d'une intégration par partie, calculer en fonction de α ; l'intégrale $I = \int_{\alpha}^e x^4 \ln x dx$ et vérifier

$$\text{que : } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I = \frac{4}{25} e^5$$

c) Déterminer alors le volume V .

Correction Exercice1

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sqrt{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) \sqrt{\frac{1}{\ln^2 x} - 1} = 0$$

$$(\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = 0)$$

Comme : $f(0) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$; par suite f est continue à droite en 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sqrt{1 - \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \sqrt{\frac{1}{\ln^2 x} - 1} = 0 .$$

$$(\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = 0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et sa courbe C_f admet au point d'abscisse 0, une demi-tangente horizontale

(c-à-d de coefficient directeur $f'_g(0) = 0$)

3) a) Pour tout réel $x \in]0; e[$; on a ;

$$\frac{f(x)}{x-e} = \frac{x^2 \sqrt{1-\ln x}}{x-e} = \frac{x^2 (1-\ln x)}{(x-e) \sqrt{1-\ln x}} = \frac{x^2 (\ln e - \ln x)}{x \left(1 - \frac{e}{x}\right) \sqrt{1-\ln x}} = \frac{x \left(\ln \frac{e}{x}\right)}{\left(1 - \frac{e}{x}\right) \sqrt{1-\ln x}} = \frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}} \times \frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x} - 1}$$

b) On a : $0 < x < e \Leftrightarrow \frac{e}{x} < 1$ donc si $x \rightarrow e^-$ alors $\frac{e}{x} \rightarrow 1^-$; alors :

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x)}{x-e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}} \times \frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x} - 1} = -\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1 ; \text{ on pose } t = \frac{e}{x})$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en e et sa courbe C_f admet au point d'abscisse e, une demi-tangente verticale.

4) a) La fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0; e[$;

Donc f est dérivable sur $]0; e[$ comme produit de fonctions dérivables ; et pour tout $x \in]0; e[$ on a :

$$f'(x) = \left(x^2 \sqrt{1-\ln x}\right)' = 2x \sqrt{1-\ln x} + \frac{x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{4x(\sqrt{1-\ln x})^2 - x}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{4x - 4x \ln x - x}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

$$\text{Alors : } \forall x \in]0; e[; f'(x) = \frac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

$$b) f'(x) = 0 \text{ et } x \in]0; e[\Leftrightarrow 3-4\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3-4\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{3}{4}}$$

D'où le tableau de variation de f.

x	0	$e^{\frac{3}{4}}$	e
$f'(x)$	0	+	-
$f(x)$	0	$\frac{e\sqrt{e}}{2}$	0

5) a) g est continue sur $[0; e]$ donc g admet des primitives sur cet intervalle

Soit G une primitive de g sur l'intervalle $[0; e]$.

G est dérivable donc continue sur $[0; e]$ et par suite continue à droite en 0

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$$

$$\text{D'où } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^e g(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [G(x)]_{\alpha}^e = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (G(e) - G(\alpha)) = G(e) - G(0) = \int_0^e g(x) dx$$

b) Posons
$$\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^4 \Rightarrow v(x) = \frac{x^5}{5} \end{cases}.$$

Donc
$$\begin{aligned} I &= \int_{\alpha}^e x^4 \ln x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \ln x \right]_{\alpha}^e - \frac{1}{5} \int_{\alpha}^e x^5 \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{5} e^5 - \frac{\alpha^5 \ln \alpha}{5} - \frac{1}{25} [x^5]_{\alpha}^e \\ &= \frac{1}{5} e^5 - \frac{\alpha^5 \ln \alpha}{5} - \frac{1}{25} (e^5 - \alpha^5) \\ &= \frac{4e^5}{25} - \frac{\alpha^5 \ln \alpha}{5} + \frac{\alpha^5}{25} \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^5 \ln \alpha}{5} + \frac{\alpha^5}{25} = 0 \text{ (car } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^5 \ln \alpha = 0)$$

Donc
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I = \frac{4e^5}{25}$$

c)
$$\begin{aligned} V &= \int_0^e \pi (f(x))^2 \, dx \\ &= \pi \times \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^e (f(x))^2 \, dx \\ &= \pi \times \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^e x^4 (1 - \ln x) \, dx \\ &= \pi \times \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\int_{\alpha}^e x^4 \, dx - \int_{\alpha}^e x^4 \ln x \, dx \right) \\ &= \pi \times \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^5}{5} - \frac{\alpha^5}{5} - I \right) \\ &= \pi \times \left(\frac{e^5}{5} - \frac{4e^5}{25} \right) \\ &= \frac{\pi e^5}{25} \end{aligned}$$

Donc :
$$V = \frac{\pi e^5}{25}.$$

