Manarat Al Firdaous
Maternelle –Primaire-Collège-Lycée
khémisset

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين الرباط - سلا - القنيطرة
المديرية الإقليمية الخميسات

L'EXAMEN BLANC A DISTANCE DE 2ème ANNÉE BAC SCIENCES MATHS A
- OPTION FRANÇAIS-
SESSION DE 11-12-13 JUIN 2020

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES **Durée : 4 H**

Premier domaine principal
EX 1 – EX 2 – EX 3

Exercice n° 1 (3,5 pts)

Soit $\theta \in]0,\pi[$

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ): $2z^2 - 2e^{i\theta}.z + i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$

a- Montrer que l'équation (E_θ) admet deux solutions distinctes que l'on déterminera. (0.5)

b- On pose : $z_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 + e^{i\theta})$

i) Ecrire sous forme trigonométrique, $z_1.z_2$ (0.5)

ii) Montrer que $z_1 = \cos{}^{\theta}/_{2}\, e^{{}^{i\theta}/_{2}}$, en déduire z_2 sous forme trigonométrique. (0.5)

2) Le plan complexe est muni d'un ROND $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points, M,A,B,M_1 et M_2 d'affixes respectives : $e^{i\theta}$; 1 ; -1 ; z_1 et z_2

a- Montrer que MAB est un triangle rectangle en M. (0.25)

b- Montrer que (AB) et (M_1M_2) sont parallèles. (0.25)

3) Soit h l'homothétie de centre M et de rapport 2 et r la rotation de centre M et d'angle $-{}^{\pi}/_{2}$

a- Montrer que $h(M_1) = A$ et $h(M_2) = B$ (0.5)

b- Montrer que les points M, B et r(A) sont alignés, puis en déduire que : $Z = \frac{1+e^{i\theta}}{i(1-e^{i\theta})}$ est un réel. (0.5)

4) Déterminer θ pour que le périmètre du triangle MAB soit maximal. (0.5)

Exercice n° 2 (6 pts)

* Partie 1

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$

1) Etudier les variations de f (0.5)

2) a- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ (0.25)

b- Vérifier que ${}^{3}/_{2} < \alpha < 2$ (On donne : $e^3 > 16$) (0.25)

c- En déduire le signe de h(x) sur $[0;+\infty[$ (0.25)

3) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$

a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (0.5)

b- Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis montrer que $(\forall x > 0)$ $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$ et dresser le TV de f (0.75)

c- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$, en déduire le signe de $f(x)$. (0.5)

* Partie 2

1) Montre que : $(\forall x \in [0;+\infty[) : h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,(1-e^{-x}) = x$ (0.25)
2) On pose pour $x \in [0;+\infty[\,;g(x) = 2(1-e^{-x})$ et $I = [{}^{3}/_{2}\,;2]$
   Montrer que $(\forall x \in I)\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (0.25)
3) On définit la suite $(Un)_{n\geq 1}$ par : $\begin{cases} u_1 = {}^{3}/_{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ $(n \in IN^{*})$
   a- Montrer que : $(\forall n \in IN^{*})\ u_n \in I$ (0.5)
   b- Montrer que : $(\forall n \in IN^{*})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (0.5)
   c- Montrer que : $(\forall n \in IN^{*})\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ (0.25)
   d- En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner sa limite. (0.25)
4) Déterminer un entier naturel p, tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

5) On pose pour $n \in IN^{*}, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$ (0.5)

Exercice n° 3 (7 pts)

Soit $n \in IN$, on pose $I_n = \int_0^1 e^{-nt}.\,ln(1+e^t)\,dt$

1) Montrer que $(\forall n \in IN)$ $I_n \geq 0$ et que la suite (I_n) est décroissante, (0.5)
   En déduire que (I_n) est convergente. (0.25)
2) Montrer que $(\forall n \in IN)$ $0 \leq I_n \leq ln(1+e).\int_0^1 e^{-nt}\,dt$, puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ (1)
3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $(\forall n \in IN)\ \ n\,I_n = ln2 - e^{-n}\,ln(1+e) + \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}dt$ (0.5)
4) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2$ (0.5)
5) Pour tout $\in IN$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.I_k$; $\alpha_n = S_{2n}$ et $\beta_n = S_{2n+1}$
   a- Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes. (1)
   b- Montrer que :
   $(\forall n \in IN)(\forall t \in IR) : \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kt} = \frac{1}{1+e^{-t}} - (-1)^{n+1}.\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$ (0.5)
   c- En déduire que :
   $(\forall n \in IN)\ \ S_n = \int_0^1 \frac{ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt - (-1)^{n+1}\int_0^1 e^{-(n+1)t}.\frac{ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt$ (0.75)
   d- Montrer que : $(\forall n \in IN)\ \ \beta_n \leq \int_0^1 \frac{ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt \leq \alpha_n$ (1)
6) a- Montrer que $\int_0^1 \frac{ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt = \int_2^{1+e} \frac{ln(u)}{u}\,du$ (0.5)
   b- En déduire la limite commune des suites (α_n) et (β_n) (0.5)

Deuxième domaine principal
(Au choix) EX 4 – EX 5

Exercice n° 4 (3.5 pts)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) $23x - 47y = 1$

1) a- Vérifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$. (0.25)

   b- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) . (0.5)

2) Déterminer tous les entiers relatifs N vérifiants : $\begin{cases} N \equiv 1[23] \\ N \equiv 2[47] \end{cases}$ (0.5)

3) a- Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{47\mathbb{Z}}$, l'équation $x^2 = \bar{1}$ (0.5)

   b- Montrer que pour tout $x \in \{1,2,\ldots,46\}$: $x^{23} \equiv -1[47]$ ou $x^{23} \equiv 1[47]$ (0.5)

   c- Montrer que $46! \equiv 46\ [47]$ (0.5)

4) Montrer que le reste de la division euclidienne de 2^{506} par 1081 est 1. (0.75)

Exercice n° 5 (3.5 pts)

Pour tout $(a,b) \in \mathrm{IR}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a,b)/a^2 + b^2 = 1\}$

1) a- Vérifier que $(\forall(a,b,c,d) \in \mathrm{IR}^4) : M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(ac-bd\,;ad+bc)}$. (0.25)

   b- Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})\,;\times)$. (0.5)

2) Soit $U = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$

   a- Prouver que $(U;\times)$ est un groupe commutatif. (0.25)

   b- Soit l'application $f : U \rightarrow E$ (0.25)

$$a + bi \rightarrow M(a,b) \qquad ((a,b) \in \mathrm{IR}^2)$$

   Montrer que f est un isomorphisme de $(U;\times)$ dans $(E;\times)$, en déduire la structure de $(E;\times)$, en déduire le symétrique d'un élément de E dans $(E;\times)$. (1)

3) On pose $A = \begin{pmatrix} -1/_2 & \sqrt{3}/_2 \\ -\sqrt{3}/_2 & -1/_2 \end{pmatrix}$, déterminer A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ **(0.5)**

4) Résoudre dans $(E;\times)$ l'équation $M^4 = A$. (1)

Bonne chance