

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \ln x}{3 + \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln \sqrt[5]{x}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2 \tan x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2} - \ln \sqrt{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(\ln x)^2 - \ln x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x \ln x + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \ln(x^2 + 2x - 3)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln x - x \ln(x+2)$

Exercice 2

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par: $g(x) = x - 2(x+1) \ln(x+1)$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2) a) Calculer $g'(x)$ et montrer que g est décroissante.

b) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) < 0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

1) montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (poser $t = \sqrt{x}$)

2) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; puis interpréter géométriquement le résultat.

3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$

b) dresser le tableau de variations de f

4) tracer la courbe (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 3

Partie A

On pose : $g(x) = x - 4 + 4 \ln x$; pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2) calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$; puis dresser le tableau de variation de g .

3) a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans une seule solution α dans $]1; 2[$.

b) En déduire que : $g(x) \leq 0$ sur $]0; \alpha]$ et $g(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \ln x$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; puis interpréter géométriquement le résultat

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donner une interprétation géométrique au résultat

3) a) Montrer que $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) vérifier que $f(\alpha) = -\frac{4}{\alpha} (\ln \alpha)^2$ puis dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

on donne $\alpha \approx 1,75$ $f(\alpha) \approx -0,72$ et $f(1) = f(4) = 0$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup [0; +\infty[$ par:
$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4) Tracer la courbe (C_f)

Partie B

On considère la fonction g telle que: $g(x) = f(-1-x)$.

1) Déterminer le domaine de définition de g

2) montrer que les courbes de g et f sont symétrique par rapport à (Δ) .

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) < 1 < g(n)$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 5

On pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$

b) en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_{n+1} - \ln(n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Dresser le tableau de variation de f et celui de g .

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Vérifier que $V_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ en déduire que (V_n) est décroissante

4) Montrer que $(\forall n > 1) ; f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n}$; déduire que (V_n) est convergente puis encadrer sa limite a

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n telle que : $f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)^2 < 2x^2$

b) Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}) ; p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$.

c) Etudier le signe de $f_n(n+1)$ et $f_n(n+2)$.

2) Calculer $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$ puis dresser le tableau de f_n .

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow n} f_n(x)$

b) Montrer que : $(\forall x > n) ; f_n(x) = -n\ln(x) - x\ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

4) Tracer la courbe de la fonction f_1 .

5) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n .

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - n) = 1$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.

Exercice 7

Partie A

Soit la fonction g définie par: $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $]0; +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α puis que $\alpha < \frac{1}{e}$

3) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- a) montrer que f est continue à droite en 0.

b) étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$ et dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) (on donne $d = 0,28$)

Partie C

Soit n un entier naturel

1) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution x_n .

2) montrer que $f(e^n) < n$; en déduire que $x_n > e^n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

3) montrer que $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right) = \frac{n}{x_n}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^n}$.

Exercice 8

Partie I

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de f et calculer les limites de f .

2) calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

3) soit m un paramètre de $\mathbb{R}_+^*$.

a) montrer que $\frac{1}{m+1} \leq \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$

b) déduire que : $(\forall m \in \mathbb{R}_+^*) ; 0 < f(m) < \frac{1}{m(m+1)}$

Partie II

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$ et $T_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+n)$

a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < T_n < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

b) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; T_n = U_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$

montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; U_n - \frac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \frac{1}{n}$.

Puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.