La tangente comme quotient

On a pour toute mesure x (différente de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$) d'un angle :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Démonstration

Dans un triangle rectangle en A ; On a vu que :

$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$; $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ et $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$

Ainsi $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$

$$= \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}$$

$$= \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$

donc pour tout angle x différent de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$ (car $\cos x \neq 0$) , on a :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Exemple

Sachant que $\cos \hat{A} = 0,5$ et $\sin \hat{A} \simeq 0,866$, calculer une valeur approchée de $\tan \hat{A}$

Solution

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \simeq \frac{0,866}{0,5} \simeq 0,577$$

Formule liant cosinus et sinus

On a pour toute mesure x d'un angle : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Démonstration

Dans un triangle rectangle en A ; On a vu que : $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$; $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$

Ainsi : $\cos^2\hat{A}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$; $\sin^2\hat{A}=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$

d'où : $\cos^2\hat{A}+\sin^2\hat{A}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$

$$=\frac{(AB)^2+(BC)^2}{(AC)^2}$$

$$=\frac{(AB)^2+(BC)^2}{(AC)^2}$$

Le théorème de Pythagore stipulant que

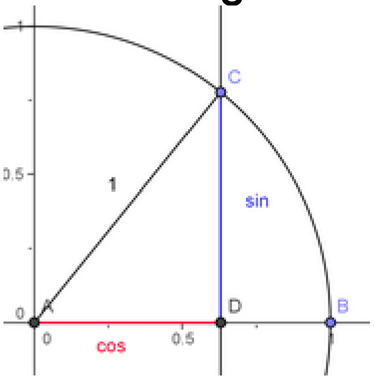
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

On a $(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2$ et donc $\frac{(AB)^2+(BC)^2}{(AC)^2}=1$

Ainsi $\cos^2\hat{A}+\sin^2\hat{A}=1$

Elargissons, car en effet pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Méthode trigonométrique



Le triangle trigonométrique montrant les rapports entre sinus et cosinus Sur **le cercle trigonométrique** ci-contre , on peut utiliser **Le théorème de Pythagore**

Ce dernier stipulant que

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

Ainsi cela se traduit par : $AD^2+CD^2=AC^2$

Or, ici : $AC=1$; $AD=\cos CAD$ et $CD=\sin CAD$

Et ainsi $\cos^2 CAD+\sin^2 CAD=1$

Elargissons, car en effet pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Exemple:

Calcul du *sinus* à partir du *cosinus*

Sachant que $\cos\hat{A}=0{,}5$, calculer une valeur exacte de $\sin x$

Solution

On a la formule : $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

donc : $(\sin A)^2 = 1 - (\cos A)^2$

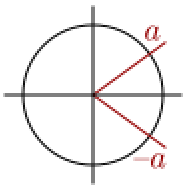
$$= 1 - 0{,}5^2$$
$$= 1 - 0{,}25$$
$$= 0{,}75$$

donc : $\sin A = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

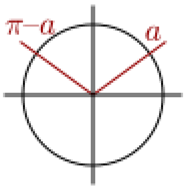
Propriétés des arc associés

On montre aisément, à l'aide de symétries, les propriétés suivantes.

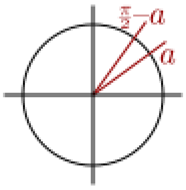
$$\cos(-a) = \cos a$$
$$\sin(-a) = -\sin a$$
$$\tan(-a) = -\tan a$$



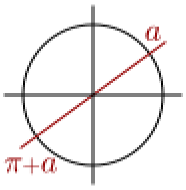
$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$
$$\sin(\pi - a) = \sin a$$
$$\tan(\pi - a) = -\tan a$$



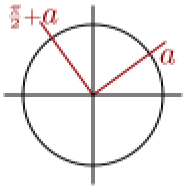
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a} = \cot a$$



$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$
$$\tan(\pi + a) = \tan a$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a} = -\cot a$$



Formules de trigonométrie

Nous démontrerons en annexe 3 les formulaires ci-dessous sur les fonctions circulaires sin, cos et tan.

Soient a et b deux réels.

Formulaire 1 : addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formulaire 2 : duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formulaire 3 : linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Formulaire 4 : produit-somme

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Formulaire 5 : somme - produit

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$
$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$$