

PROBLÈME

PARTIE A

soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 - \ln x$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

3. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations.

4- a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$

On désigne par α la plus petite des solutions.

b) Démontre que $0,4 < \alpha < 0,5$

c) Calcule $g(1)$

d) Déduis-en que, pour tout $x > 0$: si $x \in]0; \alpha[\cup]1; +\infty[$; alors $g(x) > 0$
si $x \in]\alpha; 1[$; alors $g(x) < 0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

b) Donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- f étant dérivable sur $]0; +\infty[$

Montre que, pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3- a) Démontre que : $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b) Etudier les variations de f et dresse son tableau de variation.

4- a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudie la position relative de (D) et de (C)

c) Trace (D) et (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prendra $\alpha = 0,45$ et $f(\alpha) = 3,1$).