



Devoir De Synthèse n°2

Durée : 03 heures

2ème Bac Science mathématique

Exercice n°01 : (03pts)

Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, On considère le nombre complexe : $z(\theta) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})^2$

- 1)- Déterminer le module et un argument de $z(\theta)$.
- 2)- Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$), on considère les points A et M d'affixes respectifs : $a = 1$ et $z(\theta)$.
✓ Déterminer z_H l'affixe du point H la projection orthogonale de A sur (OM) , Puis calculer la distance HM .

Exercice n°02 : (05pts)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, On pose : $f(z) = z^2 - \sqrt{2}z + i\sqrt{3}$

- 1)- a)- Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $a = 2 - 8i\sqrt{3}$.
b)- En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : f(z) = -i\sqrt{3}$.
c)- Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.
- 2)- Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
On considère les deux ensembles suivants : $(H) = \{M(z) \in (\mathcal{P}) \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$ et
 $(\Gamma) = \left\{ M(z) \in (\mathcal{P}) \mid \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.
a)- Déterminer une équation cartésienne de (H) .
b)- En déduire la nature de (H) , construire (H) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
c)- Montrer que lorsque le point $M(z)$ varie sur (Γ) , le point $M'(f(z))$ varie sur un cercle (Γ') dont on déterminera le rayon et l'affixe de son centre.

Exercice n°03 : (04pts)

- 1)- Résoudre dans, l'équation : $(E) : z^2 - 2z + a^2 + 1 = 0$, Où $a \in \mathbb{C}$
- 2)- Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs : $z_A = 1 + ia$ et $z_B = 1 - ia$ Où $a \in \mathbb{C}$.

a)- Déterminer l'ensemble (D) des points $M(a)$ tels que O, A et B soient alignés.

b)- Déterminer l'ensemble (C) des points $M(a)$ pour que OAB soit un triangle rectangle en O .

3)- On suppose dans cette partie que : $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

a)- Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors : $1 + i\alpha = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $1 - i\alpha = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

b)- En déduire z_A et z_B sous forme exponentielle.

c)- Déterminer α pour que le triangle OAB soit rectangle et isocèle en O .

Exercice n°04 : (08pts)

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln x$.

1)- Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2)- Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.

3)- Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant la réponse.

4)- Justifier que (C_f) est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5)- Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} F(x) = \frac{1-x^2}{2} + x \ln x & \text{si } x > 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1)- Montrer que F est continue à droite en 0 .

2)- Montrer que F est une primitive de la fonction : $x \mapsto -f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a)- Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n}\right)$

b)- Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

4)- a)- Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; S_n = \frac{1-n}{2n} - \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$

b)- Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$ en justifiant la réponse.

Exercices Bonus :

Exercice n°01 : (02pts)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E) : z^2 - 2m.z + 1 = 0$, Où $m \in \mathbb{C}$

- 1)- Montrer que si z_1 et z_2 sont les solutions de (E) , alors : $|z_1| + |z_2| = |m-1| + |m+1|$.
- 2)- On suppose que : $m \in [-1, 1]$
- ✓ Montrer que (E) admet une unique solution de module strictement plus grand que 1.

Exercice n°02 : (04pts)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E) : z^3 + \alpha.z^2 - \bar{\alpha}.z - 1 = 0$, Où $\alpha \in \mathbb{C}^*$

- 1)- Montrer que si $z_0 ; z_1$ et z_2 sont les solutions de (E) , alors : $z_0.z_1.z_2 = 1$.
- 2)- Montrer que si z est solution de (E) , alors $\frac{1}{z}$ est aussi solution de (E) .

Puis en déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.

- 3)- On suppose que : $|\alpha| = 1$.

✓ Montrer que $-\alpha$ est solution de (E) , puis en déduire les deux autres.

- 4)- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(F) : 2z^3 + (1+i\sqrt{3})z^2 + (-1+i\sqrt{3})z - 2 = 0$.