guessmaths

RESUME DE COURS « DÉRIVATION »

I. Rappels

1) Fonction dérivable

Définition :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ , tel que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell.$$

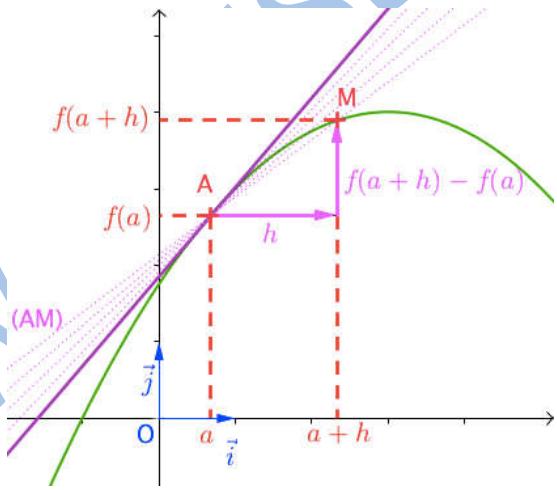
ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a.

2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition :

La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé ℓ.



Propriété :

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+3x-1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+3(2+h)-1-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+7h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+7)=7$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : $y = 7(x-2)+f(2)$, *soit :*

$y = 7(x-2)+9$

$y = 7x-5$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x-5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	***Ensemble de définition de f***	***Dérivée f '***	***Ensemble de définition de f '***
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ *entier*	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ *entier*	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^6$ *alors f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a pour tout x de* $\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^5$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *par* $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ *alors f est dérivable sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$ *et on a pour tout x de* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=-\dfrac{4}{x^5}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ *est dérivable sur I*	$(u+v)'=u'+v'$
ku *est dérivable sur I, où k est une constante*	$(ku)'=ku'$
uv *est dérivable sur I*	$(uv)'=u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$ *est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I*	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ *est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I*	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x)=(2x^2-5x)(3x-2)$

WWW.GUESSMATHS.CO

On pose $f(x)=u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=2x^2-5x \rightarrow u'(x)=4x-5$

$v(x)=3x-2 \rightarrow v'(x)=3$

Donc :

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$=(4x-5)(3x-2)+(2x^2-5x)\times 3$$
$$=12x^2-8x-15x+10+6x^2-15x$$
$$=18x^2-38x+10$$

b) $g(x)=\dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

On pose $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x)=6x-5 \rightarrow u'(x)=6$

$v(x)=x^3-2x^2-1 \rightarrow v'(x)=3x^2-4x$

Donc :

$$g(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$=\frac{6(x^3-2x^2-1)-(6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2-1)^2}$$
$$=\frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{(x^3-2x^2-1)^2}$$
$$=\frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{(x^3-2x^2-1)^2}$$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x)\leq 0$*, alors f est décroissante sur I.*

- Si $f'(x)\geq 0$*, alors f est croissante sur I.*

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^2-4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=2x-4$.

Résolvons l'équation $f'(x)\leq 0$

$2x-4\leq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 4$

$\Leftrightarrow x\leq 2$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

II. Dérivées de fonctions composées

1) Dérivée de la fonction $x\mapsto\sqrt{u(x)}$

Propriété :

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=\sqrt{u(x)}$ *est dérivable sur I et on a :* $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

WWW.GUESSMATHS.CO

Exemple :

$f(x)=\sqrt{3x^2+4x-1}$

On pose $f(x)=\sqrt{u(x)}$ *avec* $u(x)=3x^2+4x-1 \rightarrow u'(x)=6x+4$

Donc :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$=\frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}=\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$$

2) Dérivée de la fonction $x\mapsto\left(u(x)\right)^n$

Propriété :

n est un entier relatif non nul. u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif.

Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=\left(u(x)\right)^n$ *est dérivable sur I et on a :*

$f'(x)=nu'(x)\left(u(x)\right)^{n-1}$.

Exemple :

$f(x)=\left(2x^2+3x-3\right)^4$

On pose $f(x)=\left(u(x)\right)^4$ *avec* $u(x)=2x^2+3x-3 \rightarrow u'(x)=4x+3$

Donc :

$$f'(x)=4u'(x)\left(u(x)\right)^3$$

$$=4\left(4x+3\right)\left(2x^2+3x-3\right)^3$$

3) Dérivée de la fonction $x\mapsto f(ax+b)$

Propriété :

a et b sont deux nombres réels. f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction g définie sur I par $g(x)=f(ax+b)$ *est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout* $x\in J$, $ax+b\in I$ *et on a :* $g'(x)=af'(ax+b)$.

Exemple :

$f(x)=\frac{1}{5x-4}$

Alors $f'(x)=5\frac{-1}{(5x-4)^2}=\frac{-5}{(5x-4)^2}$

En effet :

$(5x-4)'=5$ *et* $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$

4) Formules de dérivation sur les fonctions composées

Fonction	*Ensemble de définition*	*Dérivée*
$\sqrt{u}$	$u(x)>0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n *avec* $n\in\mathbb{Z}^*$	*Si* $n<0$, $u(x)\neq 0$	$nu'u^{n-1}$
$f(ax+b)$	*f dérivable*	$af'(ax+b)$

WWW.GUESSMATHS.CO

Méthode :
Etude d'une fonction composée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{3x+1}}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.
3) Etudier la dérivabilité de f.
4) Etudier les variations de f.
5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C.
6) Vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ *donc la fonction f est définie pour* $\dfrac{2x}{3x+1}\geq 0$.

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$	-		-		0	+	
$3x+1$	-	0	+			+	
$\dfrac{2x}{3x+1}$	+		‖	-	0	+	

Donc la fonction f est définie sur $]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup[0;+\infty[$.

2) - Recherche des limites à l'infini :
La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination : $\dfrac{2x}{3x+1}=\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x+1}=\dfrac{2}{3}$.

De plus $\lim\limits_{X\to\frac{2}{3}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On en déduit, comme limite de fonction composée, que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On démontre de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ainsi la droite d'équation $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ *est asymptote horizontale à la courbe C en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

- Recherche de la limite en $-\dfrac{1}{3}$ *:*

WWW.GUESSMATHS.CO

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(3x+1)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}2x=-\frac{2}{3}$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{3}\\x<-\frac{1}{3}}}\frac{2x}{3x+1}=+\infty$.

En effet, pour $x<-\frac{1}{3}$, $3x+1<0$.

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{3}\\x<-\frac{1}{3}}}f(x)=+\infty$.

Ainsi la droite d'équation $x=-\frac{1}{3}$ *est asymptote verticale à la courbe C.*

3) $x\mapsto\frac{2x}{3x+1}$ *est strictement positive et dérivable sur* $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{\sqrt{\frac{2h}{3h+1}}-0}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2h}{3h+1}}$$

$$=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\sqrt{\frac{1}{h^2}\times\frac{2h}{3h+1}}$$

$$=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\sqrt{\frac{2}{3h^2+h}}=+\infty$$

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

4) Pour tout réel x de $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, *on pose* $u(x)=\frac{2x}{3x+1}$.

$$u'(x)=\frac{2(3x+1)-3\times2x}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(3x+1)^2}$$

Donc : $f'(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$ *Et donc :* $\left(\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]0;+\infty\right[\right)$ $f'(x)>0$.

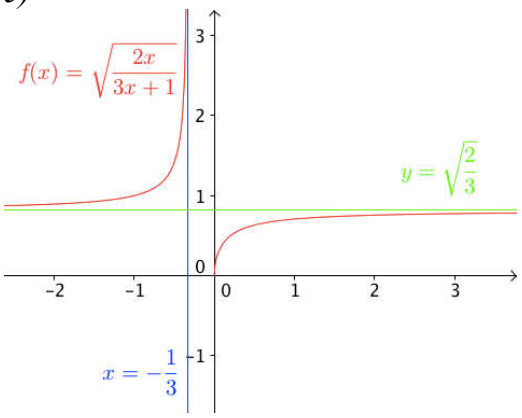
Par conséquent la fonction f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ *et sur* $\left]0;+\infty\right[$.

WWW.GUESSMATHS.CO

On dresse le tableau de variations : $f(0)=0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		//////////		$+$		
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	//////////		0	↗	$+\infty$

5)



WWW.GUESSMATHS.CO