Exercice 1

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n *définie sur* $]1;+\infty[$ *par :* $f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{1}{\ln t} dt$

et (C_n) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $(\forall t \in]1;+\infty[); \ln t < t-1$ *; puis déduire* $\lim_{x \to 1^+} f_n(x)$

2) a) Montrer que : $(\forall t \in]1;+\infty[); \frac{nx-x}{\ln(nx)} \leq f_n(x) \leq \frac{nx-x}{\ln(x)}$

b) Déduire $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ *; puis donner une interprétation géométrique au résultat.*

3) a) Montrer que f_n *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et que :* $(\forall x \in]1;+\infty[)$;

$$f_n'(x) = \ln\left(\frac{x^{n-1}}{n}\right) \times \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{1}{\ln(nx)}$$

b) Vérifier que (C_n) *admet une tangente unique parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse* $x = n^{\frac{1}{n-1}}$ *et d'ordonne* N_n.

c) Dresser le tableau de variation de f_n *sur* $]1;+\infty[$.

Exercice 2

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt}\sqrt{1+t^2}\, dt$

et (C) *sa courbe représentative dans un report orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que F est une fonction paire.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $F(0) \times e^{-x} \leq F(x) \leq F(0) \times e^x$.

b) Déduire que F est continue a droite en 0.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $F(x) \geq \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

b) Déduire le nature de la branche infinie de (C) *au voisinage de* $+\infty$.

4) a) En utilisant le changement de variable $u = t + \sqrt{1+t^2}$ *déterminer la valeur de* $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

b) Déduire la valeur de $F(0)$.

Exercice 9

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x} & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Partie II

On considère la fonction F définie pour tout $x > 0$ *par :* $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$

2) On pose : $I(x) = \int_x^{2x} \dfrac{f(t)}{t} dt$ *; tel que* $x \geq 1$.

a) Montrer que : $(\forall x \geq 1)$; $\dfrac{\ln 2}{2x - \ln(2x)} \leq I(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x - \ln x}$ *puis calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$

b) Montrer que : $F(x) - I(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x - \ln 2}{x - \ln x}\right)$ *puis déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on pose :* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$ *et* $J_n = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2} dt$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $(i) \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times I_n$

$(ii) \quad (n+1) \times I_{n+1} \times I_n = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad (i) \quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

2) Montrer que la suite $\left(\sqrt{n} \times I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente ; puis calculer sa limite*

3) En utilisant l'inégalité : $(\forall x \in]-1;+\infty[)$; $\ln(1+x) \leq x$ *; Montrer que :*

$(\forall u \in \mathbb{R})$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u \geq -n \Rightarrow \left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leq e^u$

4) Déduire que : $\left(\forall t \in \left[0; \sqrt{n}\right]\right)$; $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$

5) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sqrt{n} \times I_{2n+1} \leq J_n \leq \sqrt{n} \times I_{2n-2}$*; puis déduire que la suite* $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente et déterminer sa limite.*