BAC BLANC N° 68 **2éme Bac PC**

EXERCICE 1: (2,5 POINTS)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n} \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

0,25 1- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n \geq \dfrac{1}{3}$

0,25 2- a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{6}\left(u_n - \dfrac{1}{3}\right)$

0,50 b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

0,25 c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

3- On pose : $v_n = \dfrac{3u_n - 1}{3u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

0,50 a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométriques dont on déterminera la raison et le premier terme.

0,50 b) Écrire v_n en fonction de n, puis montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

0,25 c) Calculer de nouveau $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

EXERCICE 2: (2,5 POINTS)

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(3;0;6)$; $I(0;0;6)$ et (D) la droite passant par A et par I.

On appelle (P) le plan d'équation: $2y+z-6=0$ et (Q) est le plan d'équation $y-2z+12=0$.

0,50 1- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

0,50 2- Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

1 3- Les plans (P) et (Q) coupent l'axe (O; y) respectivement en B et C. Déterminer les coordonnées des points B et C.

0,25 4- Trouver une équation du plan (T) passant par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$

0,25 5- Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 3(3 POINTS)

0,50 1- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 6z + 17 = 0$

0,25 b) Trouver la fonction numérique f, deux fois dérivable telle que :
$2f''(x) - 6f'(x) + 17f(x) = 0$, où f' et f'' sont les dérivées première et seconde

de f telles que $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$.

2- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives: $z_A=\frac{3}{2}+6i$; $z_B=\frac{3}{2}-6i$; $z_C=-3-\frac{1}{4}i$; $z_P=3+2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$

$\boxed{0,25}$ a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

$\boxed{0,25}$ b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

$\boxed{0,25}$ c) Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{0,25}$ 3- a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

$\boxed{0,50}$ b) Calculer $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

$\boxed{0,50}$ c) Justifier que les points P, Q, R. et S appartiennent à un même cercle, noté C. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon.

$\boxed{0,25}$ 4- La droite (AP) est-elle tangente au cercle C?

EXERCICE 4: (2,5 POINTS)

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et successivement avec remise 3 boules de cette urne.
On considère les événements:

. A: "Les trois boules sont vertes;"
. B: "Les trois boules sont de la même couleur;"
• C: "Les trois boules sont chacune d'une couleur différente;"
• D: "Tirer au moins une boule jaune."

$\boxed{1,00}$ 1- Calculer les probabilités p(A), p(B), p(C) et p(D).

2- On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes obtenues.

$\boxed{1,00}$ a) Donner la loi de probabilité de X.

$\boxed{0,50}$ b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

EXERCICE 5 (2,5 POINTS)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (l'unité graphique étant 1 cm).

$\boxed{0,50}$ 1- a) Calculer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\boxed{0,25}$ b) Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$ on a : $f'(x)=-\frac{1}{x(x-1)}$

0,25 c) Dresser le tableau de variation de f

0,25 2- a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

0,50 b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f. Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in J$.

0,25 3- a) Vérifier que la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par:

$F(x) = x\ln(2x) - (x-1)\ln(x-1)$ est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

b) Soit α un réel de l'intervalle $]1;2[$.

0,25 Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y=0$, $x=\alpha$ et $x=2$.

0,25 c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} A(\alpha)$

EXERCICE 6:

Partie I:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

0,50 1- Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

0,50 2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, exactement deux solutions α et β ; puis vérifier que : $1 < \alpha < 2$ et $-2 < \beta < -1$

0,50 3- En déduire le signe de $g(x)$.

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1,00 1- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis interpréter géométriquement ces résultats.

0,50 2- a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$.

0,50 b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

0,50 c) Dresser le tableau de variation de f.

0,50 d) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

0,50 3- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.

0,50 b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a on a : $f(x) - x = \dfrac{(1+x)(1-x-e^{-x})}{x+e^{-x}}$

0,50 c) Déduire que (C_f) est au-dessous de (T) sur $[-1;+\infty[$ et que est au-dessus de (T) sur $]-\infty;-1]$

1,00 d) Tracer (C_f) et (T). (On prendra $\alpha \simeq 1{,}1$; $f(\alpha) \simeq 0{,}45$; $\beta \simeq -1{,}8$ et $f(\beta) \simeq -1{,}2$)