

Notion d'ensemble

Définition

• Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

• F est une partie (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E . Cela se note $F \subset E$.

• On note $\emptyset$ l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.

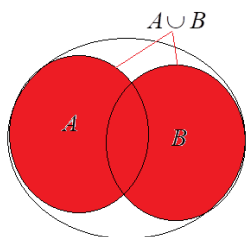
Dans la suite A et B seront trois sous-ensembles d'un ensemble de E .

Notion d'ensemble : l'union

Définition

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux est appelé union de A et B , noté

$$A \cup B. \quad A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

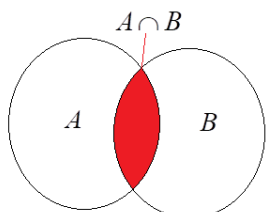


Notion d'ensemble : l'intersection

Définition

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B est appelé intersection de A et B noté

$$A \cap B. \quad A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

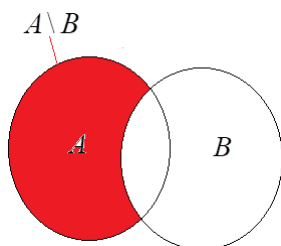


Notion d'ensemble : la différence

Définition

L'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé différence de A et B , noté

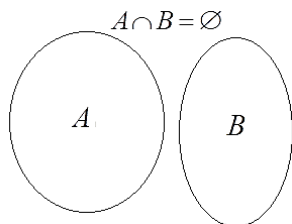
$$A - B \text{ ou } A \setminus B. \quad A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



Notion d'ensemble : l'incompatibilité

Définition

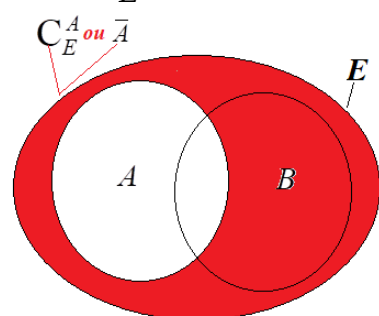
Deux ensembles A et B sont disjoints ou incompatibles s'ils n'ont aucun élément en commun. $A \cap B = \emptyset$



Notion d'ensemble : le complémentaire

Définition

L'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A est le complémentaire de A dans E noté $\bar{A}$, ou C_E^A alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$. $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$



Notion d'ensemble : le produit cartésien

Définition

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est appelé produit cartésien de E_1 et E_2 , noté $E_1 \times E_2$

Exemple

Attention car $E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1$ comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

$$\{1; 2\} \times \{3; 4\} = \{(1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4)\} \text{ et } \{3; 4\} \times \{1; 2\} = \{(3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2)\}.$$

Dénombrement

Définition

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé cardinal de E , noté $\text{Card}(E)$.

Exemple

Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors $\text{Card}(A) = 6$.

Dénombrement : Formules générales

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis.

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) - \text{Card}(E_1 \cap E_2)$$

$$\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2)$$

Dénombrement : Principe fondamental

Proposition

Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si, pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences prises ensemble.

Remarque

Ce principe se généralise facilement à plusieurs expériences.

Exercice

Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés "père et fils exemplaires", combien y a-t-il de choix différents possibles ?

Dénombrement : problème de placement

Problématique

On souhaite répondre à la question suivante : combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments

Ce nombre est différent selon que l'on autorise ou non les répétitions (prendre plusieurs fois le même élément) et que l'on tienne compte ou pas de l'ordre des éléments.

Il y a quatre possibilités classiques et un cas particulier.

Dénombrement : les p -listes

Nombre de tirages avec remise et avec ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est alors n^p .

Exemple

Si $E = \{a, b, c, d, e\}$, alors il y a possibilité de construire $5^3 = 125$ mots de 3 lettres.

Nombre de tirages sans remise et avec ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exercice

Avec les lettres A, B et C, combien y-a-t-il de façons de former des paires de lettres distinctes ?

Nombre de tirages sans remise et sans ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercice

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Dénombrement : les combinaisons

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- Pour $0 \leq p \leq n-1$; $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Triangle de PASCAL

Nombre de tirages avec remise et sans ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : C_{n+p-1}^p .

Exercice

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Combien de couples distincts peut-on créer ?

Les couples $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont identiques.

Dénombrement : les permutations d'objets distinguables

Proposition

Le nombre de permutations de n objets est $n! = A_n^n$.

Exercice

De combien de manières peut-on disposer 6 livres (distincts) sur une étagère ?

Dénombrement : les permutations d'objets partiellement distinguables

Proposition

Il y a $n!n_1!n_2!\cdots n_r!$ permutations différentes de n objets parmi lesquels les n_i ($1 \leq i \leq r$) sont indistinguables entre eux.

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	r^p p -listes
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas	qu'une seule fois	C_n^p combinatoires

Exercice

Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 4 Français, 3 Américains, 2 Anglais et un Marocain. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leur identité, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elle ?

	Avec ordre	
Avec répétition	n^p	C_{n+p-1}^p
Sans répétition	A_n^p	C_n^p

Probabilités :

Vocabulaire Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience donnant un résultat que l'on ne peut prévoir à l'avance.
Par exemple, lancer un dé.
- **Ensemble d'événements possibles ou ensemble fondamental Ω** : ensemble de tous les résultats possibles.

Dans l'exemple, lancer un dé. Ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- **Événements élémentaires** : sous-ensembles de Ω contenant un seul résultat possible.

Dans l'exemple, lancer un dé. Ici les événements élémentaires sont donc $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ et $\{6\}$.

- **Événement** : sous-ensemble de Ω .

Dans l'exemple, lancer un dé. Si E est l'événement "obtenir un résultat pair", alors $E = \{2; 4; 6\}$.

Définitions

- Si E est un événement, son complémentaire $\bar{E}$ est l'événement contraire.

Dans l'exemple, lancer un dé. Ici $\bar{E} = \{1; 3; 5\}$ c'est-à-dire "obtenir un résultat impair".

- Deux événements E_1 et E_2 sont incompatibles ou disjoints si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Dans l'exemple, lancer un dé. Par exemple "obtenir un 4 ou un 6" et "obtenir un résultat impair" sont deux événements incompatibles.

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité P sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout événement E associe ses "chances" de se réaliser $P(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- **Axiome 1** : $P(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- **Axiome 2** : Pour l'événement certain $P(\Omega) = 1$. Pour l'événement impossible $P(\emptyset) = 0$.
- **Axiome 3 (Axiome d'additivité)** : Si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Plus généralement si (E_i) est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors $P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$.

Probabilités :

Propriétés

Proposition E_1 et E_2 sont deux événements quelconques :

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

Equiprobabilité

Définition

On dit qu'on est dans le cas d'équiprobabilité quand l'espace fondamental Ω est fini et que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Alors pour tout événement E , $P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple

On lance deux fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ?

Equiprobabilité : Exemple en considérant l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Equiprobabilité : Exemple sans considérer l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2		{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3			{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4				{4,4}	{4,5}	{4,6}
5					{5,5}	{5,6}
6						{6,6}

$$P(E) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Indépendance

Définition :

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque

Pour savoir si 2 événements sont indépendants, il faut calculer séparément $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$. Puis les comparer.

Exemple

On joue 2 fois au P ou F de manière indépendante avec une pièce équilibrée (tout événement relatif au premier lancé est indépendant d'un événement relatif au 2ème lancé).

$$\begin{aligned} \text{Alors on a : } P(\text{"P" au 1er lancé ET "P" au 2ème lancé}) &= P(\text{"P" au 1er lancé}) \times P(\text{"P" au 2ème lancé}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Non indépendance : exemple

On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.

Soient $A = \{\text{le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6}\}$ et $B = \{\text{le chiffre de la face obtenue est pair}\}$

A et B sont-ils indépendants ?

On calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

On obtient :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\text{obtenir un multiple de 6 ET un nombre pair}) \\ &= P(\text{obtenir un 6}) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} P(A) \times P(B) &= P(\text{obtenir un multiple de 6}) \times P(\text{obtenir un nombre pair}) \\ &= P(\text{obtenir 6}) \times P(\text{obtenir 2, 4 ou 6}) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned} \right.$$

Ainsi $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; donc A et B ne sont pas indépendants.

Probabilités conditionnelles

Définition

- Probabilité conditionnelle de A sachant B : $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Conséquence : $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$.

Exercice

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours du jet unique d'un dé sachant que le résultat obtenu est impair ?

Propriété

Si A et B sont indépendants alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

C'est-à-dire $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$: la réalisation d'un événement n'affecte pas la réalisation du second.

Propriété (Formule de Bayes)

Si $P(A) \neq 0$ alors on a : $P(B|A) = \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A)}$.

Définition

On dit qu'une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont disjoints

$(A_i \cap A_j) = \emptyset$; $\forall i \neq j \in I$ et qu'ils recouvrent Ω $\left(\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \right)$.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Pour toute partition $(A_i)_{i \in I}$ et tout événement B , on a : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$.

Remarque

En couplant la formule de Bayes et la formule des probabilités totales à la partition $(B; \bar{B})$, on obtient une version très utile en pratique de la formule de Bayes suivante :

Propriété (Formule de Bayes reformulée)

$$\text{Si } P(A) \neq 0 \text{ alors on a : } P(B|A) = \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A|B) \times P(B) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B})}$$

Exercice

En Europe occidentale, 5% des garçons et 0, 25% des filles naissent daltoniens. 51% des naissances concernent des garçons.

- 1- Quelle est la proportion de garçons dans la population des bébés daltoniens ?
- 2- Quelle est la proportion d'enfants daltoniens ?

Un coup de pouce . . .

En Europe occidentale, parmi les garçons 5% sont daltoniens et parmi les filles 0, 25% naissent daltoniennes.

Variables aléatoires

Définition :

- Une variable aléatoire X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P , à valeurs dans P .
- X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ définies par :
 $p_i = P(X = x_i)$.
- L'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée P_x , est appelée **loi de probabilité de X** .

Exercice :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 20 DHS pour chaque résultat « pile » et on perd 10 DHS pour chaque résultat « face ».

- 1°) Quel est l'ensemble E des issues possibles ?
 - 2°) Soit X l'application de E dans P qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.
- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un gain de 30 DHS » ?

On note cette probabilité $P(X = 30)$.

On obtient une nouvelle loi de probabilité sur l'ensemble des gains $E' = X(E) = \{-30 ; 0 ; 30 ; 60\}$; nous la nommons loi de probabilité de X :

Gain x_i	$x_1 = -30$	$x_2 = 0$	$x_3 = 30$	$x_4 = 60$
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

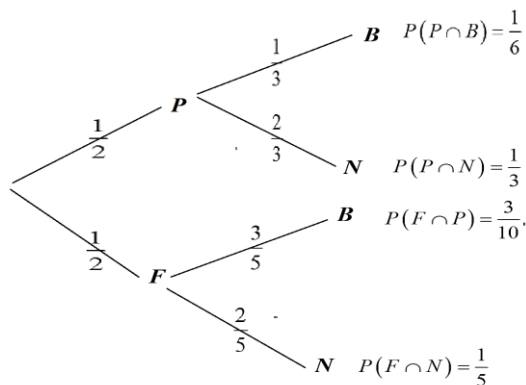
CONDITIONNEMENT

a. Arbres pondérés Règles de construction La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Exemple

On jette une pièce.

- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
- Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :



LOIS DE PROBABILITE

a) Loi de Bernoulli

Définition :

Une alternative est une épreuve à deux issues possibles :

- Le succès, noté 1, de probabilité p ,
- L'échec, noté 0, de probabilité $q = 1 - p$.

Sa loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre p .

Exemple :

Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{7}$. On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».

Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit une loi de Bernoulli. Si On effectue cinq fois cette expérience. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.

Théorème :

Pour une loi de Bernoulli de paramètre p , l'espérance est p et l'écart type est $\sqrt{pq}$.

b) Loi Binomiale

Définition :

Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors :

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \text{ avec } (0 \leq k \leq n).$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, on appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancers. On obtient les probabilités suivantes :

$$P_0 = P(X = 0) = C_5^0 \times \left(\frac{1}{7}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{5-0} = 0,4627.$$

$$P_1 = 0,3856 ; P_2 = 0,1285 ; P_3 = 0,0214 ; P_4 = 0,0018 ; P_5 = 0,0001.$$

Théorème :

Pour une loi Binomiale de paramètres n et p , l'espérance est np et l'écart type est $\sqrt{npq}$.

Exercice :

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux sont rouges et les autres sont bleus.

1°) On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilité p d'obtenir un jeton rouge ?

2°) On tire successivement 6 jetons un à un, avec remise.

a) Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir exactement trois jetons rouges ?

b) Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir exactement un jeton rouge ou un jeton bleu ?

c) Quelle est la probabilité P_3 d'obtenir au moins quatre jetons rouges ?

www.guessmaths.co