

Proposition- Fonction propositionnelle

Exercice N°1

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible,

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 0$$

$$P_2 : \exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$$

$$P_3 : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) / n < m$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{Q}) / x = y \text{ ou } x > y$$

$$P_5 : (\forall y \in \mathbb{R}); (\exists x \in \mathbb{R}) / x - 2y + 1 = 0$$

$$P_6 : (\exists x \in \mathbb{R}) / 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$P_7 : (\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 = y^2 \text{ et } x = y$$

$$P_8 : (\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq \cos x \leq 1$$

Exercice N°2

Écrire à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques les propositions suivantes :

- 1) Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre réel positif.
- 2) L'équation $x^2 - 6x + 7 = 0$ admet au moins une solution réelle.
- 3) Il n'existe aucun rationnel x qui vérifie : $x^2 = 3$.
- 4) Il existe au moins un réel inférieur à tous les nombres réels.
- 5) Si un nombre réel quelconque est inférieur à -1 alors c'est un nombre réel strictement négatif.
- 6) Le produit de deux nombres réels quelconques est nul si et seulement si l'un d'eux est nul.

Exercice N°3

(Raisonnement par contraposé)

$$1) \text{ Montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1.$$

$$2) \text{ Soit } a \text{ et } b \text{ deux réels tels } b \neq 2a.$$

$$\text{Montrer que : } b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$$

$$3) \text{ Montrer que : } (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : (x + y \leq 6 \Rightarrow (x \leq 3 \text{ ou } y \leq 3)).$$

$$4) \text{ Montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}) : (x + x^3 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1)$$

$$5) \text{ Montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}) : (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$$

Exercice N°4

(Raisonnement par implications successives)

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \left(2 \leq x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{x}{x^2 - 3} \leq 3 \right)$
- 2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \right)$
- 3) Montrer que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 3} \Rightarrow |x| = |y| \right)$
- 4) Montrer que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : xy^2 - yx^2 = y - x \Rightarrow x = y \text{ ou } xy = 1$

Exercice N°5

(Raisonnement par équivalences)

- 1) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}) : |a - 2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a + 2} \leq \frac{1}{6}$
- 2) Soit a, b et c des réels
Montrer que : $(a^3 + a = b^3 + b) \Leftrightarrow a = b$
- 3) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que : $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3} \sqrt{x}$
- 4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : (\sqrt{2x + 2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1)$

Exercice N°6

(Raisonnement par l'absurde)

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : (2\sqrt{1 + x^2} \neq x^2 + 2)$
- 2) Montrer que : $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
- 3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$

Exercice N°7

(Raisonnement par contre-exemple)

- 1) Montrer que la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 5x + 4 > 0$ est fausse.
- 2) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$:.
Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.

Exercice N°8

(Raisonnement par disjonction des cas)

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq x^2 - x + 5$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - |3x - 1| + 2 = 0$

3) Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice N°9

(Raisonnement par récurrence)

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); (1+x)^n \geq nx + 1$.

6) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 9$ divise $4^n + 6n - 1$

7) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 11$ divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$

8) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.