

Correction de l'Examen
Normalisé n° 36

2^{ème} Bac P. S. T

Exercice 1

$$A(z_A = 1 - i) ; B(z_B = \sqrt{3} - i) \text{ et } C(z_C = 2 + \sqrt{3} + i).$$

$$\begin{aligned} 1) a) z_A &= 1 - i \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{z_A = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)}$$

$$\begin{aligned} b) z_B &= \sqrt{3} - i \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{z_B = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)}$$

$$\begin{aligned} 2) a) z_A \times z_C &= (1 - i)(2 + \sqrt{3} + i) \\ &= 2 + \sqrt{3} + i - 2i - i\sqrt{3} + 1 \\ &= 3 + \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i \\ &= \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i \\ &= (1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - i) \\ &= (1 + \sqrt{3})z_B. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{z_A \times z_C = (1 + \sqrt{3})z_B}$$

$$b) \text{ On a: } z_A \times z_C = (1+\sqrt{3})z_B$$

$$\Leftrightarrow z_C = (1+\sqrt{3}) \times \frac{z_B}{z_A}$$

$$\Leftrightarrow z_C = (1+\sqrt{3}) \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow z_C = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$$

$$\Leftrightarrow z_C = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc: } \boxed{z_C = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)}$$

3) a) Soit M le point d'affixe z ; alors

z vérifie l'équation: $|z+i-1|=3$

$$\Leftrightarrow |z-(1-i)|=3$$

$$\Leftrightarrow |z-z_A|=3$$

$$\Leftrightarrow AM=3$$

$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon 3.

Donc l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z+i-1|=3$ est le cercle de centre A et de rayon 3.

b) Soit M un point d'affixe z qui vérifie

$$\left| \frac{z+i-1}{z+i-\sqrt{3}} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-(1-i)|}{|z-(\sqrt{3}-i)|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-(1-i)| = |z-(\sqrt{3}-i)|$$

$$\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$$

2

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Donc l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $\left| \frac{z+i-1}{z+i-\sqrt{3}} \right| = 1$ est la droite médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 2

$$(\forall x \in]1; +\infty[) ; f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

$$1) \text{ On a : } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 4 + 3}{x - 1}$$

$$= \frac{(x-1)(x+4) + 3}{x - 1}$$

$$= x + 4 + \frac{3}{x - 1}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall x \in]1; +\infty[) ; f(x) = x + 4 + \frac{3}{x - 1}}$$

$$2) \int_4^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} dx = \int_4^2 \left((x+4) + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \int_4^2 (x+4) dx + 3 \int_4^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= - \int_2^4 (x+4) dx - 3 \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= - \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^4 - 3 \left[\ln(x-1) \right]_2^4$$

$$= - \left(\frac{16}{2} + 16 - \left(\frac{4}{2} + 8 \right) \right) - 3 (\ln 3 - \ln 1)$$

$$= -14 - 3\ln 3$$

$$\text{Donc : } \boxed{\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1} dx = -(14+3\ln 3)}$$

$$3) \text{ On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln x & \text{alors } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{alors } v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \int_1^e 2 \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{e^2+1}{4}$$

$$\text{Donc : } \boxed{I = \frac{e^2+1}{4}}$$

Exercice 3

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 \leq u_n \leq 8$

Initialisation :

pour $n=0$; on a : $u_0 = 3$; donc :

$$3 \leq u_0 \leq 8$$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que : $3 \leq u_n \leq 8$ et montrons que : $3 \leq u_{n+1} \leq 8$

③

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$3 \leq u_n \leq 8 \Rightarrow 3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} u_n \leq 8 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + 4 \leq \frac{1}{2} u_n + 4 \leq 4 + 4$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2} \leq u_{n+1} \leq 8$$

$$\Rightarrow 3 \leq \frac{11}{2} \leq u_{n+1} \leq 8$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq 8$$

Conclusion

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); 3 \leq u_n \leq 8}$$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n + 4 - u_n$$

$$= 4 - \frac{1}{2} u_n$$

$$= \frac{1}{2} (8 - u_n)$$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq 8$.

$$\text{alors : } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

D'où (u_n) est une suite croissante et comme elle est majorée par 8 alors elle est convergente

2) $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - 8$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8$$

$$= \frac{1}{2} u_n + 4 - 8$$

$$= \frac{1}{2} u_n - 4$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - 8)$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$

Donc: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$

① où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
et de 1^{er} terme $v_0 = -5$

par suite: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$v_n = u_n - 8 \Rightarrow u_n = v_n + 8$$

$$\Rightarrow u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8$$

$$\Rightarrow u_n = 8 - \frac{5}{2^n}$$

Donc: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 8 - \frac{5}{2^n}}$

d) On a: $u_n - 8 > -10^{-5} \Rightarrow -\frac{5}{2^n} > -10^{-5}$

$$\Rightarrow \frac{5}{2^n} < 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{5} > \frac{1}{10^{-5}}$$

$$\Rightarrow 2^n > 5 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow \ln 2^n > \ln(5 \cdot 10^5)$$

$$\Rightarrow n \ln 2 > \ln 5 + \ln 10^5$$

$$\Rightarrow n \ln 2 > \ln 5 + 5 \ln 10$$

$$\Rightarrow n \ln 2 > \ln 5 + 5 \ln 2 + 5 \ln 5$$

$$\Rightarrow n > 5 + \frac{6 \ln 5}{\ln 2} \approx 18,93$$

④

Donc le plus petit entier naturel tel que $u_n - 8 > -10^5$ est $n = 19$.

e) (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $V_0 = -5$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$$

$$= V_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= -5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 10 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = 10 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

Problème

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \ln(1 + 2e^x)$$

Partie I

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$f'(x) = (\ln(1 + 2e^x))'$$

$$= \frac{(1 + 2e^x)'}{1 + 2e^x}$$

$$= \frac{2e^x}{1 + 2e^x}$$

Donc: $\left(\forall x \in \mathbb{R} \right); f'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}$

Donc: $\left(\forall x \in \mathbb{R} \right); f'(x) > 0$

alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \ln 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+2e^x) - x - \ln 2)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x(e^{-x} + 2)) - x - \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x + \ln(e^{-x} + 2) - x - \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(e^{-x} + 2) - x - \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{-x} + 2) - \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{-x} + 2}{2}\right)$$

$$= 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ $\left[\begin{array}{l} \text{on pose } t = -x \\ x \rightarrow +\infty \text{ alors } t \rightarrow -\infty \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{array} \right]$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \ln 2)) = 0$; alors

(G) admet la droite (D) d'équation $y = x + \ln 2$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

⑤

3) On a; pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) - (x + \ln 2) = \ln\left(\frac{e^{-x} + 2}{2}\right) \\ = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{2}\right)$$

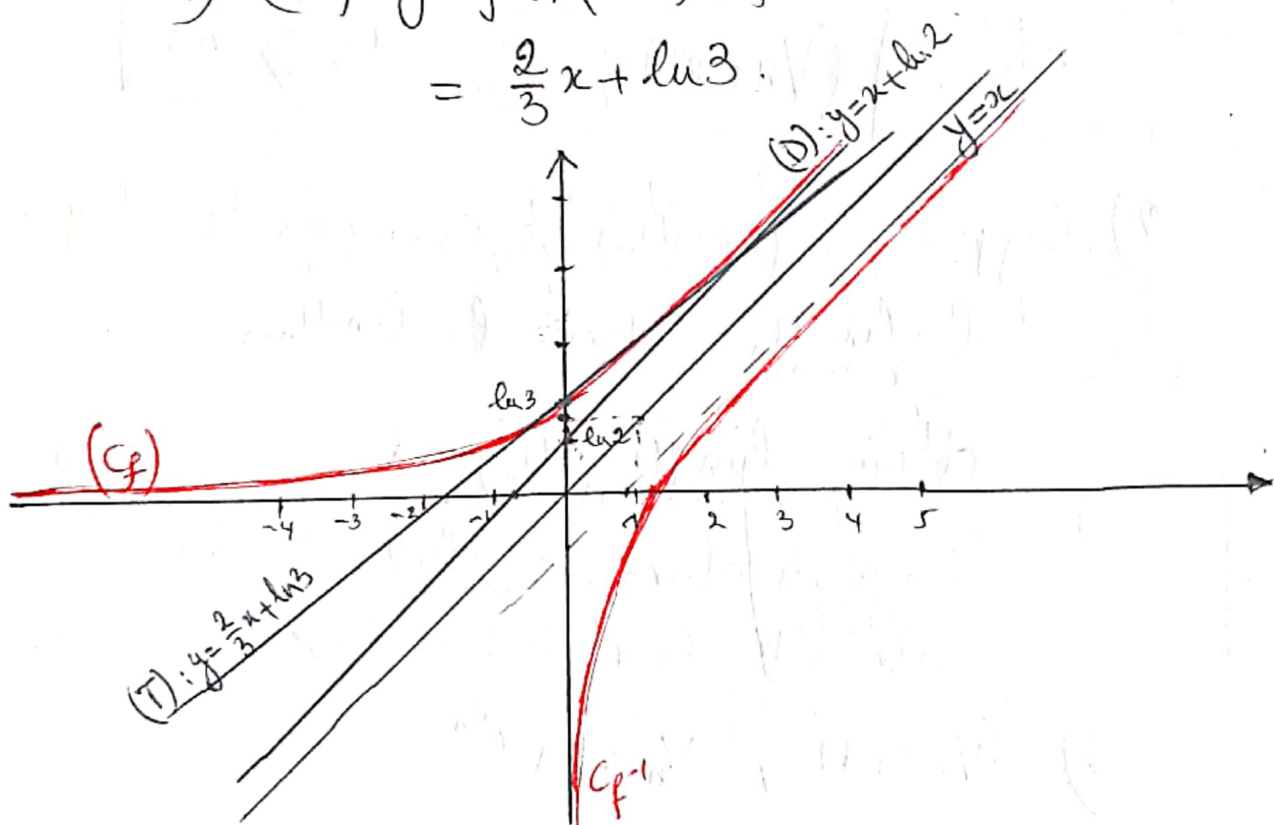
et comme $1 + \frac{e^{-x}}{2} > 1$; alors

$$\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{2}\right) > 0$$

Donc: $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) - (x + \ln 2) > 0}$

D'où (C) est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

$$4) (T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ = \frac{2}{3}x + \ln 3.$$



Partie II

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) D'après la partie I.3) on a :

$$f(x) - (x + \ln 2) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$f(u_n) - (u_n + \ln 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n - \ln 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq \ln 2$$

$$\text{Alors : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \geq \ln 2}$$

2) Supposons que (u_n) est convergente et que :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{donc } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

On aura alors $0 \geq \ln 2$ ce qui est absurde car $\ln 2 \approx 0,69 > 0$.

$$3) (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 + e^{u_n}$$

a) Pour tout $(n \in \mathbb{N})$; on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 + e^{u_{n+1}} \\ &= 1 + e^{\ln(1+2e^{u_n})} \\ &= 1 + 1 + 2e^{u_n} \\ &= 2(1 + e^{u_n}) \end{aligned}$$

⑥

$$\forall n \in \mathbb{N} ; V_{n+1} = 2V_n$$

Par suite (V_n) est géométrique de raison $q=2$
et de 1^{er} terme $V_0 = 1 + e^{u_0} = 2$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = 2^{n+1}}$$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$V_n = 1 + e^{u_n} \Leftrightarrow e^{u_n} = V_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(V_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(2^{n+1} - 1)$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \ln(2^{n+1} - 1)}$$

$$c) u_n = \ln(2^{n+1} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2^{n+1} - 1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(2^{n+1}) + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(n+1) \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right]$$

$$= +\infty$$

$$\left(\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0 \right)$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

Partie III

1) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}
définie sur $J = f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

$$=]0; +\infty[$$

$$= \mathbb{R}_+^*$$

$$2) \text{ On a : } \begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(1 + 2e^y) \\ x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 + 2e^y \\ x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^y = e^x - 1 \\ x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^y = \frac{e^x - 1}{2} \\ x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{2}\right) \\ x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

($x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\frac{e^x - 1}{2} > 0$)

$$\text{Donc } \boxed{(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{2}\right)}$$

⑦ 3) Voir graphe partie I, 4)

$$4) \text{ On a: } 2\ln 3 \leq x \leq 3\ln 3 \Leftrightarrow \ln 3^2 \leq x \leq \ln 3^3$$

$$\Leftrightarrow \ln 9 \leq x \leq \ln 27$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq e^x \leq 27$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq e^x - 1 \leq 26$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \frac{e^x - 1}{2} \leq 13$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 \leq \ln\left(\frac{e^x - 1}{2}\right) \leq \ln 13$$

$$\Leftrightarrow \int_{2\ln 3}^{3\ln 3} \ln 4 \, dx \leq \int_{2\ln 3}^{3\ln 3} \ln\left(\frac{e^x - 1}{2}\right) \, dx \leq \int_{2\ln 3}^{3\ln 3} \ln 13 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 \left[x \right]_{2\ln 3}^{3\ln 3} \leq A \leq \ln 13 \left[x \right]_{2\ln 3}^{3\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 \times \ln 3 \leq A \leq \ln 13 \times \ln 3$$

$$\text{Donc: } \boxed{\ln 3 \cdot \ln 4 \leq A \leq \ln 3 \cdot \ln 13}$$