EXAMEN BLANC N° 8 *2éme Bac PC- SVT*

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; on considère les points suivants $A(2;-3;1)$; $B(5;0;4)$; $C(5;-3;-2)$ et $D(1;-1;0)$.

Soit (S) la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$.

1. a. Montrer que: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=9\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

   b. Montrer que : $x-2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Montrer que : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=9\sqrt{6}$.

   d. En déduire le volume du quadrilatère $ABCD$

2. a. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

   b. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point dont on déterminera les coordonnées.

3. Soit (P) le plan d'équation cartésienne: $x+y+z=0$.

   a. Montrer que les deux plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

   b. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2

On considère les nombres complexes suivants : $a=2+i$; $b=3+2i$; $c=1+2i$ et $d=\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}i$

1. a. Montrer que: $c-d=\sqrt{2}\left(-1+\left(\sqrt{2}-1\right)i\right)$ et $(c-d)^2=4\left(\sqrt{2}-1\right)(a-c)$

   b. En déduire le nombre complexe $c-d$ sous forme trigonométrique.

   c. Montrer que d est une solution de l'équation $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+\left(5+2\sqrt{2}\right)=0$ dans $\mathbb{C}$.

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct les points A; B;C ; et D d'affixes respectifs a ; b ; c et d.

   a. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

   b. Montrer que $\overrightarrow{AD}=\left(\sqrt{2}-1\right)\overrightarrow{AB}$.

   c. Montrer que: $\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$.

   d. Soit u l'affixe du point E l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   Montrer que: $\arg\dfrac{c-b}{c-u}\equiv\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 3

Une urne contient 4 balles blanches ; 4 vertes et 2 rouges (ces balles sont indiscernables au toucher).
On tire au hasard de l'urne 3 balles successivement et sans remise.

1. Soit A l'événement: « les 3 balles tirées de l'urne ont la même couleur » et B l'évènement «Parmi les 3 balles tirées de l'urne il y a deux balles rouges »

Montrer que: $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{15}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage au nombre de balles rouges tirées.

   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

3. Déterminer la probabilité pour que la première balle tirée soit rouge sachant que les deux autres balles sont de couleurs différentes

Problème

A / On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par: $\begin{cases} g(x)=x^2(1+\ln x)-1 & si \quad x\neq 0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

Et, Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que la fonction g est continue à droite en 0 (on rappelle que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$).

   b. Montrer que: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$; puis donner une interprétation géométrique au résultat.

3. a. Montrer que: $g'(x) = 2x\ln\left(e\sqrt{e}x\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

4. a. Montrer que 1 est une Solution de l'équation $g(x)=0$.

   b. Montrer que $g(x)<0$ pour tout x de $]0;1[$ et que $g(x)>0$ pour tout x de $]1;+\infty[$.

   c. Montrer que: $x^2-1<g(x)$ pour tout x de $]1;+\infty[$.

5. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1 .

   b. Tracer la tangente (T) à la courbe (C) (on prendra 5 cm pour unité)

   c. Soit S la surface(en cm²) de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses ; la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.

En utilisant une intégration par parties montrer que: $S=\dfrac{25}{9}\left(5e^3-9e+7\right)$

B/On considère la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(xe^x+e^{-x}\right)^2$

1. a. Montrer que : $f(x)-x=\dfrac{1}{4}\left(u(x)\right)^2$ pour tout x de $]-\infty;+\infty[$; Où u est la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

   $u(x)=xe^x-e^{-x}$.

   b. Montrer que la fonction u est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

   c. En déduire qu'il existe un réel unique α tel que : $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha\in]0;1[$.

2. a. Montrer que: $(\forall x\in]-\infty;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2e^{4x}+xe^{4x}+e^{2x}-1\right)$

   b. En déduire que: $(\forall x\in]-\infty;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}g\left(e^x\right)\left(g\left(e^x\right)-e^{2x}+2\right)$.

   c. Montrer que: $g\left(e^x\right)>0$ et $g\left(e^x\right)-e^{2x}+2>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

   d. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Montrer que : $f\left([0;\alpha]\right)=\left[\dfrac{1}{4};\alpha\right]$.

C / Soit la Suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

   a. Montrer que: $0\leq u_n\leq\alpha$ pour tout entier naturel n.

   b. Montrer que : la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.