



guessmaths

Série n°8 d'exercices corrigés sur Racine n^{ième}

2^{ème} Bac PC

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Solution :

1) la fonction $u : x \mapsto \sqrt[5]{x^3 + 24}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; donc $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = u(2)$
 $= \sqrt[5]{8 + 24} = 2$

2) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 + 2x^3 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ présente une Forme indéterminé " $\left(\frac{0}{0}\right)$ "

Alors pour $x \neq 0$; on a :
$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x+1}^3 - 1)}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+1-1)}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1}+1)} \\
 &= \frac{x}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1}+1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1}+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1}+1} \right) \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

4) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ présente une Forme indéterminé " $\left(\frac{0}{0}\right)$ "

$$\begin{aligned}
 \text{Alors pour } x \neq 8 ; \text{ on a : } \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} &= \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{x}^3 - 2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} \\
 &= \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$ présente une Forme indéterminé " $\left(\frac{0}{0}\right)$ "

Alors pour $x \neq 1$; on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} &= \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2 - \sqrt{x+3} + 2}{x-1} \\
 &= \frac{(\sqrt[3]{2x+6} - 2) - (\sqrt{x+3} - 2)}{x-1} \\
 &= \frac{(\sqrt[3]{2x+6} - 2)(\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2) - (\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2) - (\sqrt{x+3} + 2)} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt[3]{2x+6}^3 - 2^3}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{\sqrt{x+3}^2 - 2^2}{\sqrt{x+3} + 2}}{x-1} \\
 &= \frac{\frac{2x+6-8}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{x+3-4}{\sqrt{x+3} + 2}}{x-1} \\
 &= \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{(x-1)}{\sqrt{x+3} + 2}}{x-1} \\
 &= \frac{\cancel{(x-1)} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \right)}{\cancel{(x-1)}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\sqrt[3]{2+6^2} + 2\sqrt[3]{2+6} + 4} - \frac{1}{\sqrt{1+3+2}} \\
 &= \frac{2}{4+4+4} - \frac{1}{2+2} \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ présente une Forme indéterminé " $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ "

Alors pour $x \neq 1$; on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} &= \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2-2)^2}} \\
 &= \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}}
 \end{aligned}$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = 0$

7) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$ présente une Forme indéterminé " $\left(\frac{0}{0}\right)$ "

Alors pour $x > 1$; on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} &= \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} \\
 &= \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}}
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$$

Et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Exercice 2 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{256} \times \sqrt{18}}$

2) a) Comparer : $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$

b) Comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) Comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Solution :

1) $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{256} \times \sqrt{18}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^5 \times 2^5 \times 5^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{2^8} \times \sqrt{2 \times 3^2}}$$

$$= \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 2 \times 5}{2^{\frac{6}{4}} \times 2^{\frac{8}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{10+6}{3}} \times 5}{2^{\frac{6}{4} + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}} \times 3}$$

$$= \frac{2^{\frac{16}{3}} \times 5}{2^{\frac{18+16+6}{12}} \times 3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{\frac{16}{3}} \times 5}{2^{\frac{10}{3}} \times 3} \\
&= \frac{2^3 \times 5}{3} \\
&= \frac{40}{3}
\end{aligned}$$

2) a) On sait que : ${}^{n \times m}\sqrt{a^m} = {}^n\sqrt{a}$; donc $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \times 4]{4^4} = \sqrt[20]{4^4} = \sqrt[20]{256}$ et $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20]{243}$

Comme la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt[20]{256} > \sqrt[20]{243} \Leftrightarrow \sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$.

b) On a : $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3 \times 2]{28^2} = \sqrt[6]{784}$ et $\sqrt{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$ et $\sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784} \Leftrightarrow \sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$

c) On a : $\sqrt[5]{23} = \sqrt[5 \times 3]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$ et $\sqrt[15]{12167} > \sqrt[15]{151} \Leftrightarrow \sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$

Exercice 3 :

1) Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \quad c = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \quad d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x \right)$$

Solution :

1) On utilise l'identité : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \text{Donc } a &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{\sqrt[3]{2}^3 - 2^3} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{-6} \\
 &= \frac{2^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{2}{3}} + 2 \times 2^{\frac{1}{3}} + 2^2 \right)}{-2} \\
 &= - \frac{\left(2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} + 2^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} + 2^{2+\frac{1}{2}} \right)}{2} \\
 &= - \frac{\left(2^{\frac{7}{6}} + 2^{\frac{11}{6}} + 2^{\frac{15}{6}} \right)}{2} \\
 &= -2^{\frac{1}{6}} \left(1 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} \right) \\
 &= -2^{\frac{1}{6}} \left(1 + 2^{\frac{2}{3}} + \left(2^{\frac{2}{3}} \right)^2 \right) \\
 &= -\sqrt[6]{2} \left(1 + \sqrt[3]{2} \left(1 + \sqrt[3]{2} \right) \right) \\
 &= -\sqrt[6]{2} \left(1 + \sqrt[3]{4} \left(1 + \sqrt[3]{4} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \text{Donc } b &= \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2} + 1} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2} + 1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3}$$

$$= \sqrt[3]{2} - 1$$

► Donc $c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2}{\sqrt[3]{2}^3 - \sqrt[3]{5}^3}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

► Donc $d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5}^2 + \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}^3 - \sqrt[3]{2}^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1} \right)$ présente une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "

Pour $x \neq 1$; on a :

$$\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x+3} - 2) - (\sqrt{3x+1} - 2)}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{x+3-4}{\sqrt{x+3}+2} \right) - \left(\frac{3x+1-4}{\sqrt{3x+1}+2} \right)}{\frac{\sqrt[3]{x}^3 - 1^3}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}\right) - \left(\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}\right)}{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1^2}} \\
&= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)\right) \times \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1^2\right) \\
D'où \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x} - 1}\right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)\right) \times \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \times 3 \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)$ présente une forme indéterminée " $((+\infty) - (+\infty))$ "

$$\begin{aligned}
\text{Pour } x > 0 ; \text{ on a : } \sqrt[3]{x^3+1} - x &= \frac{\sqrt[3]{x^3+1}^3 - x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2}\right) = 0$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2\right) = +\infty)$$

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Solution :

$$\begin{aligned} 1. \text{ On } a : \sqrt[3]{x} - x = 0 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[3]{x} - x)(\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2)}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[3]{x^3} - x^3)}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x - x^3}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Donc $S = \{-1; 0; 1\}$

$$2. \text{ On } a : \sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^2 - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

On pose : $X = \sqrt[6]{x}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0 &\Leftrightarrow X^2 - 5X + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(X^2 - 2 \times \frac{5}{2}X + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right) + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(X - \frac{5}{2} \right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \\ &\Leftrightarrow \left(X - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow X - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ ou } X - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow X = 3 \text{ ou } X = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 3 \text{ ou } \sqrt[6]{x} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 3^6 = 729 \text{ ou } x = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

Donc $S = \{64; 729\}$