Devoir surveillé n° 3 – 2éme semestre **2éme Bac S.M**

Durée 3h

Exercice 1 (2 pts)

1) Soit n un entier naturel, Déterminer selon les valeurs de n la division euclidienne de 2^n par 9.
2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $(E):\ x^2 \equiv 2^x\ [9]$

Exercice 2 (3pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(F):\ 7x-5y=18$.
2) a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$; tel que $k\neq 8$; on a : $(7k+2)\wedge(5k+4)=(k+8)\wedge 18$
   b) Déduire les couples $(x\,;y)$ solutions de (F) qui vérifient $x\wedge y=1$.
3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations :
   $(1):\ x^2\equiv 4\ [5]$ et $(2):\ x^2\equiv 2\ [7]$
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(G):\ 7x^2-5y^2=18$

Exercice 3 (3pts)

1) On définit dans $\mathbb{R}^2$ la loi de Composition interne $*$ par : $(\forall(a\,;b)\in\mathbb{R}^2)$; $(\forall(c\,;d)\in\mathbb{R}^2);(a\,;b)*(c\,;d)=\left(\frac{1}{3}ad+\frac{1}{3}bc\,;\frac{1}{3}bd-\frac{3}{4}ac\right)$ et soit f l'application définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^2$ par : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $f(z)=f(a+ib)=(2b\,;3a)$
   a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ vers $(\mathbb{R}^2\,;*)$
   b) Déduire la structure de $(\mathbb{R}^2-\{0;0\};*)$.
   c) Déterminer le symétrique de tout élément $(a\,;b)$ de $\mathbb{R}^2-\{0;0\}$
   d) Résoudre dans $\mathbb{R}^2-\{0;0\}$ l'équation $(H):(a\,;b)*(a\,;b)*(a\,;b)=(0\,;3)$
2) Pour tout réel a; on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=ax$ et on considère l'ensemble $E=\{f_n\ /\ a\in\mathbb{R}\}$
   a) Montrer que E est une partie stable pour les lois $+$ et $\circ$.
   b) En utilisant un homomorphisme convenable montrer que $(E;+)$ et $(E;\circ)$ sont deux groupes commutatifs
   c) Montrer que $\circ$ est distributive par rapport à $+$ dans E ; puis déduire la structure de $(E;+;\circ)$.

Exercice 4 **(2pts)**

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x\,;y)=\begin{pmatrix} x & y \\ qy & x \end{pmatrix} \;/\; (x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ *; tel que q est un réel variable.*

1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

2) On suppose que : $q<0$ *et on pose :* $\omega=i\sqrt{-q}$.

a) Vérifier que : $(\forall z\in\mathbb{C})\,;\,\left(\exists!(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)\,/\,z=x+\omega y$

b) Montrer que l'application φ *définie de* $\mathbb{C}^*$ *vers* E^* *par :* $\varphi(z)=(x+\omega y)=M(x\,;y)$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{C}^*;\times)$ *vers* $(E^*;\times)$*; puis déduire la structure de* $(E^*;\times)$.

c) Déterminer l'inverse de tout élément $M(x\,;y)$ *de* $(E^*;\times)$.

3) On considère que : $q\geq 0$.

Vérifier que : $M\left(\sqrt{q}\,;1\right)\times M\left(-\sqrt{q}\,;1\right)=O$*;* $(E^*;\times)$ *est-il un groupe ? Justifier votre réponse*

Exercice 5 **(10pts).**

I - *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$*; puis donner une interprétation géométrique au résultat.*

b) Etudier les variations de f_n *; puis dresser son tableau de variation.*

(Il faut procéder par disjonction des cas : $n=0$ *;* $n=1$ *et* $n\geq 2$*).*

c) Montrer que les courbes (C_n) *de* f_n *passent par un point fixe* Ω *à déterminer.*

2) a) Montrer que le Courbe (C_0) *de* f_0 *admet point d'inflexion unique I à déterminer.*

b) Montrer que (C_0) *admet le point* Ω *comme centre de symétrie ; puis déterminer l'équation de la tangente à* (C_0) *en ce point,*

c) Construire (C_0) *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$*; l'unité de mesure est 4 cm.*

3) Comparer $f_1(x)$ *et* $f_0(-x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; puis construire* (C_1) *à partir de* (C_0) *dans* $(O;\vec{i};\vec{j})$

II - *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par:* $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $U_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$*;* $0\leq U_n\leq\dfrac{1}{2}$ *; et que la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente*

2) a) Calculer U_0+U_1*;* U_1 *; puis déduire* U_0

b) Calculer l'aire de la partie du plan, délimitée par (C_0) *et les droites d'équations* $x=0$ *;* $x=1$ *et* $y=\dfrac{1}{2}$

c) Déduire l'aire de la partie du plan délimitée par (C_0) ; (C_1) et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

3) Sans Calculer U_n montrer que : $(\forall n>1)$; $U_n+U_{n-1}=\dfrac{1-e^{1-n}}{n-1}$

4) soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose : $V_n=U_n+U_{n-1}$; calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

III - Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{f_1(-x)}{(x+1)\,f_0(-x)}$

On considère la fonction F définie sur $[1;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^{2\ln(x)}g(t)dt$.

1) a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$; $g(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$

b) Vérifier que F est bien définie sur $[1;+\infty[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$; puis calculer $F'(x)$.

d) Déduire que : $(\forall x\in[1;+\infty[)$; $F(x)=\int_1^x\dfrac{2t}{1+2\ln(t)}dt$.

2) a) Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$; $e^t\geq 1+t$; puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x\in]2;+\infty[)$; $F(x)\geq\int_{\frac{x}{2}}^x\dfrac{2t}{1+2\ln(t)}dt$

c) Montrer que : $(\forall x\in]2;+\infty[)$; $\left(\exists c\in\left[\dfrac{x}{2};x\right]\right)$ / $F(x)\geq\dfrac{cx}{1+2\ln(c)}$.

d) Déduire que : $(\forall x\in]2;+\infty[)$; $\dfrac{F(x)}{x}\geq\dfrac{x}{2(1+2\ln(x))}$

e) Dresser le tableau de variation de F.