guessmaths

Correction Examen National 2017 Rattrapage
2 Bac SM A et B

Exercice 1

1) D'abord E est une partie non vide $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $I = M(1,0) \in E$

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E et α un réel ; alors :

$$\alpha M(a,b) + M(c,d) = \alpha\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & -3(\alpha b + d) \\ \alpha b + d & \alpha a + c \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a + c, \alpha b + d) \in E \quad (\text{car } (\alpha a + c, \alpha b + d) \in \mathbb{R}^2)$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$

Soit $M(x,y)$ une matrice de E

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= xI + yJ \qquad \text{où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc (I, J) est une famille génératrice de E.

Soient α et β deux réels ; on a : $\alpha I + \beta J = M(0,0) \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc (I, J) est libre ; alors c'est une base de E et on a $\dim E$ est le nombre d'éléments de (I, J) ; d'où $\dim E = 2$

2) a) E est une partie non vide $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E

$$\text{On a : } M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac - 3bd & -3(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 3bd \end{pmatrix}$$

$= M(ac-3bd, ad+bc) \in E$ (car $(ac-3bd, ad+bc) \in \mathbb{R}^2$)

Donc E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b) Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif ; on vérifie les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $\times$ est une loi associative.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E.
- $\times$ admet un élément neutre.
- $\times$ est commutative dans E.

On a :

- E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$; donc la première assertion est vérifiée.
- La 2iéme et la 3iéme assertions sont vérifiées du fait que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que est une loi associative distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- La 4iéme assertion est sont vérifiée car $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans E.
- Pour la dernière assertion ; Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E

On a : $M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ca-3db & -3(da+cb) \\ da+cb & ca-3db \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$= M(c,d) \times M(a,b)$$

Donc $\times$ est commutative dans E.

Par suite $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif

3) a) Soient (a,b) et (c,d) deux couples de $\mathbb{R}^2$; on a :

$$\varphi((a+ib)\times(c+id)) = \varphi((ac-bd)+i(ad+bc))$$

$$= M\left((ac-bd), \frac{ad+bc}{\sqrt{3}}\right)$$

Et $\varphi(a+ib)\times\varphi(c+id) = M\left(a, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \times M\left(c, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$

$$= M\left(ac - 3.\frac{b}{\sqrt{3}}.\frac{d}{\sqrt{3}}, a.\frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}.c\right)$$
$$= M\left(ac - bd, \frac{ad + bc}{\sqrt{3}}\right)$$

D'où $\varphi\left((a,b)\times(c,d)\right) = \varphi(a+ib)\times\varphi(c+id)$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

Soit $M(a,b)\in E^*$; on a : $\varphi(x+iy) = M(a,b) \Leftrightarrow M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a,b)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \dfrac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

D'où l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une solution unique

Donc l'application φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$; par suite elle est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

b) Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif et φ un isomorphisme ; alors $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (E^*,\times)$ est un groupe commutatif

c) On a : $j^{2017} = \left(M(0,1)\right)^{2017}$
$$= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017}$$
$$= \left(\varphi\left(0+i\sqrt{3}\right)\right)^{2017}$$
$$= \left(\varphi\left(i\sqrt{3}\right)\right)^{2017}$$
$$= \underbrace{\varphi\left(i\sqrt{3}\right)\times\varphi\left(i\sqrt{3}\right)\times\ldots\times\varphi\left(i\sqrt{3}\right)}_{2017\ fois}$$
$$= \varphi\left(\underbrace{i\sqrt{3}\times i\sqrt{3}\times\ldots\times i\sqrt{3}}_{2017\ fois}\right)$$
$$= \varphi\left(i^{2017}\times\sqrt{3}^{2017}\right)$$
$$= \varphi\left(i\sqrt{3}\times\left(\sqrt{3}^{2}\right)^{1008}\right)$$
$$= \varphi\left(i\sqrt{3}.3^{1008}\right)$$

Donc $j^{2017} = \varphi\left(i\sqrt{3}.3^{1008}\right)$

$$On\ a : sym\left(j^{2017}\right) = \left(j^{2017}\right)^{-1}$$
$$= sym\left(\varphi\left(i\sqrt{3}.3^{1008}\right)\right)$$
$$= \varphi\left(sym\left(i\sqrt{3}.3^{1008}\right)\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{1}{i\sqrt{3}.3^{1008}}\right)$$
$$= \varphi\left(0 - \frac{i}{\sqrt{3}.3^{1008}}\right)$$
$$= M\left(0; \frac{-1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}.3^{1008}}\right)$$
$$= M\left(0; \frac{-1}{3^{1009}}\right)$$

$$Donc\ \left(j^{2017}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3^{1008}} \\ \frac{-1}{3^{1009}} & 0 \end{pmatrix}$$

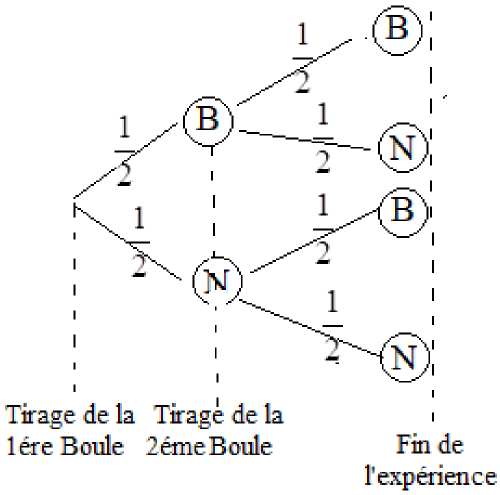
4) Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien.
- $(E,\times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.
- $\times$ est commutative dans E .

Ce qui est aisément facile à vérifier

Exercice 2

L'arbre ci-dessous résume l'expérience aléatoire :



1) Soit l'événement A « gagner 20 points est le fait de tirer deux Boules Blanches» ; donc

$p(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Soit l'événement C « perdre 20 points est le fait de tirer deux Boules Noires» ; donc

$p(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Soit l'événement D « gain nul est le fait de tirer la 1ére Boule Noire et la 2éme Boule Blanche ou tirer la 1ére Boule Blanche et la 2éme Boule Noire» ; donc

$p(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2) Soit $p=\frac{1}{4}$ la probabilité de gagner 20 points et n le nombre de fois qu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions ; on considère le succès gagner et l'échec perdre .

a) Gagner 100 points c'est avoir 5 succès ; donc de probabilité :

$$p(20\,succès)=C_5^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-5}$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$$

b) Gagner 40 points c'est avoir 2 succès ; donc de probabilité :

$$p(20\,succès)=C_5^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-2}$$
$$=10\times\frac{1}{16}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$$
$$=\frac{270}{1024}$$

3) a) On a : $X(\Omega)=\{-20;0;20\}$

$p(X=-20)=p(C)=\frac{1}{4}$

$p(X=0)=p(D)=\frac{1}{2}$

$p(X=20)=p(A)=\frac{1}{4}$

D'où la loi de probabilité de X

x_i	-20	0	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b) l'espérance mathématique de X est : $E(X)=\sum_{i=-20;0;20} x_i p(X=x_i)$

$$= -20\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+20\times\frac{1}{4}=0$$

Exercice 3

1) Les points M et M' ; donc : $M'=M \Leftrightarrow z'=z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=z$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow z^2=1$$

$$\Leftrightarrow z=1 \quad ou \quad z=-1$$

2) On a : $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}$

$$=\frac{\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}+1}{\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}-1}$$

$$=\frac{\frac{z^2+2z+1}{2z}}{\frac{z^2-2z+1}{2z}}$$

$$=\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

$$=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

Donc $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$; si $M\in(\Delta)$ alors ; on a :

$$AM=BM \Rightarrow \frac{AM}{BM}=1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AM}{BM}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|=1$$

$$\Rightarrow |z'+1|=|z'-1|$$

$$\Rightarrow AM'=BM'$$

Donc $M' \in (\Delta)$

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètre est le segment $[AB]$; on a $M \in (\Gamma)$ alors le triangle AMB est rectangle en M ; donc on a : $(AM) \perp (BM)$

D'où : $\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z'-1} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{M'} - z_B}{z_{M'} - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (AM') \,||\, (BM')$$

Donc le point $M'(AB)$

Exercice 4

f définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x} & si \;\; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

I- 1) f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$ tel que le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$; étudions la continuité de f à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0}\right)$$

$$= \left(\arctan(x)\right)'_{x=0}$$

$$= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{x=0} = 1 \qquad et \;\; f(0) = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Alors f est continue à droite en 0.

Par suite f est continue sur $I = [0;+\infty[$

2) a) Soit $x \in I$; pour tout $t \in [0;x]$; on a : $0 \le t \le x \Rightarrow 0 \le t^2 \le x^2$

$$\Rightarrow 1 \le t^2 + 1 \le x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{t^2+1} \le 1$$

Donc $\left(\forall t\in[0;x]\right)$; $\dfrac{1}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{t^2+1}\leq 1$

b) D'après la question précédente on a :

Donc $\left(\forall t\in[0;x]\right)$; $\dfrac{1}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{t^2+1}\leq 1\Rightarrow\int_0^x\dfrac{1}{x^2+1}dt\leq\int_0^x\dfrac{1}{t^2+1}dt\leq\int_0^x 1dt$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}[t]_0^x\leq\int_0^x\frac{1}{t^2+1}dt\leq[t]_0^x$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}\leq\arctan(x)\leq x$$

Donc $\left(\forall x\in I\right)$; $\dfrac{x}{x^2+1}\leq\arctan(x)\leq x$

c) On a : $\left(\forall x\in I\right)$; $\dfrac{x}{x^2+1}\leq\arctan(x)\leq x\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+1}\leq\dfrac{\arctan(x)}{x}\leq 1$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}-1\leq\frac{\arctan(x)}{x}-1\leq 0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^2}{x^2+1}\leq\frac{\arctan(x)}{x}-1\leq 0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^3}{x^2+1}\leq\frac{\frac{\arctan(x)}{x}-1}{x}\leq 0$$

$$\Rightarrow\frac{-x^3}{x^2+1}\leq\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}\leq 0$$

Donc par encadrement puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^3}{x^2+1}=0$; on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}=0$;

par suite f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

3) a) Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$; on a : $f'(x)=\left(\dfrac{\arctan(x)}{x}\right)'$

$$=\frac{\frac{1}{1+x^2}\times x-\arctan(x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}-\frac{\arctan(x)}{x^2}$$

Donc $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $f'(x)=\dfrac{1}{x\left(1+x^2\right)}-\dfrac{\arctan(x)}{x^2}$

b) On sait que : : $\left(\forall x\in I\right)$; $\dfrac{x}{x^2+1}\leq\arctan(x)\Rightarrow\dfrac{x}{x^2+1}-\arctan(x)\leq 0$

$$\Rightarrow f'(x)\leq 0$$

Donc f est décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

II- 1) a) Soient x et t deux réels strictement positifs ; on a :

$$\frac{t}{t^2+1} \le \arctan(t) \le t \Rightarrow \frac{1}{t^2+1} \le \frac{\arctan(t)}{t} \le 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt \le \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \le \int_0^x 1dt$$

$$\Rightarrow \left[\arctan(t)\right]_0^x \le \int_0^x f(t)dt \le [t]_0^x$$

$$\Rightarrow \arctan(x) \le \int_0^x f(t)dt \le x$$

$$\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{x} \le \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \le 1$$

$$\Rightarrow f(x) \le g(x) \le 1$$

Pour $x=0$; on a : $f(0)=g(0)=1 \Rightarrow f(0)\le g(0)\le 1$

Donc $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f(x)\le g(x)\le 1$

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$; on a :

$f(x)\le g(x)\le 1 \Rightarrow f(x)-1 \le g(x)-1 \le 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x} \le \frac{g(x)-g(1)}{x} \le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x}\right) \le \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow f'_d(0) \le \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x}\right) = 0$$

Donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

2) a) f est continue sur $[0;+\infty[$ et $0\in[0;+\infty[$; donc f admet une primitive φ sur $[0;+\infty[$ telle que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $\begin{cases} \varphi(x)=\int_0^x f(t)dt & \text{et } \varphi(0)=0 \\ \varphi'(x)=f(x) \end{cases}$

On a : $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{\varphi(x)}{x}$

Les fonctions $x\mapsto\varphi(x)$ et $id : x\mapsto x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $x\neq 0$ sur $]0;+\infty[$; donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$; et on a :

$$\forall x>0 \; ; \; g'(x)=\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)'$$

$$= \frac{x.\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x.f(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} \times f(x) - \frac{1}{x} \times \frac{\varphi(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$$

3) D'après la question II-1)a) ; on a :

$$\forall x > 0 \; ; f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $]0;+\infty[$.

4) Soit $x > 1$ et $1 \leq t \leq x$; on a :

$$0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\arctan(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2t}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^x \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right) dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\left[\ln(t)\right]_1^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{\ln(x)}{x}$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; donc par encadrement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$

D'autre part on a : $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(1)$ (car f est croissante sur I)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\pi}{4} dt \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt \leq \frac{1}{x}$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4x} = 0$; donc par encadrement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$

De plus ; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

III- 1) la fonction $\phi(x)=g(x)-x$ est continue sur $[0,1]$.

Et $\begin{cases}\phi(0)=g(0)=1>0\\ \phi(1)=g(1)-1=\int_0^1 f(t)dt-1=-1<0\end{cases}$

Donc $\phi(0)\times\phi(1)<0$

D'après TVI ; l'équation $\phi(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]0,1[$

Ou $(\exists\alpha\in]0,1[)$ tel que : $\phi(\alpha)=0\Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$

On peut montrer facilement que ϕ est strictement décroissante sur $]0,1[$ pour l'unicité de α.

2) a) Soit $x\in]0;+\infty[$; alors d'après la question I- 2)b) on a :

$$\frac{x}{x^2+1}\le\arctan(x)\le x\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}\le\frac{\arctan(x)}{x}\le1$$
$$\Rightarrow-1\le-\frac{\arctan(x)}{x}\le-\frac{1}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow0\le1-\frac{\arctan(x)}{x}\le1-\frac{1}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow0\le1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$

b) Pour tout $x>0$; et $t\in[0,x]$ on a :

$$0\le1-f(t)\le\frac{t^2}{t^2+1}\Rightarrow-1\le-f(t)\le\frac{t^2}{t^2+1}-1$$
$$\Rightarrow-1\le-f(x)\le\frac{-1}{t^2+1}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{t^2+1}\le f(t)\le1$$
$$\Rightarrow\int_0^x\frac{1}{t^2+1}dt\le\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x 1dt$$
$$\Rightarrow\arctan(x)\le\int_0^x f(t)dt\le x$$
$$\Rightarrow\frac{\arctan(x)}{x}\le\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\le1$$
$$\Rightarrow f(x)\le g(x)\le1$$
$$\Rightarrow0\le g(x)-f(x)\le1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow0\le g(x)-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{g(x)-f(x)}{x}\right) \le \frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \le |g'(x)| \le \frac{1}{2}$$

3) a) g est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle de bornes α et u_n càd $\left[Min(\alpha, u_n); Max(\alpha, u_n)\right]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après TAF ; on a :

$\left(\exists c \in \left[Min(\alpha, u_n); Max(\alpha, u_n)\right]\right)$:

$$\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha} = g'(c) \Rightarrow \left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |g'(c)| \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |g(u_n)-g(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

Donc $(\forall \in n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b) Montrons par récurrence que : $(\forall \in n \in \mathbb{N})$; $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

<u>Pour $n=0$</u> ; on a $|u_0-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$

<u>Soit $n \in \mathbb{N}$</u> ; supposons que : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ et montrons que

D'après la question 3)a) on a : $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ et l'hypothèse de récurrence

$|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$; on obtient :

$$\begin{cases} |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha| \end{cases} \Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$$

<u>Conclusion :</u> $(\forall \in n \in \mathbb{N})$; $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

$(\forall \in n \in \mathbb{N})$; $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

On conclut que $\lim_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$

Par suite que $\left(u_n\right)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$