guessmaths

Devoir 03

2éme Bac SM A et B

Date: 22-12-2022 Durée : 3 Heures

Exercice 01 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $D=]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-8}{(x+2)(x^2+3x-4)}$

1. Trouver trois réels a, b et c tels que : $(\forall x\in D)$; $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx+c}{x^2+3x-4}$
2. Trouver une primitive de la fonction $g: x\mapsto \dfrac{1}{x^2+3x-4}$ sur D.
3. En déduire toutes les primitives de la fonction f sur D

Exercice 02: (6 Points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2-\dfrac{\ln x}{x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f
3. a) Montrer que : $\forall x>0$; $\ln x-x^2-1<0$

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

   c) Vérifier que : $1,6<\alpha<1,7$.
4. a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right]\right)$; $|f'(x)|\leq\dfrac{4}{9}$

   b) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right]\right)$; $|f(x)-\alpha|\leq\dfrac{4}{9}|x-\alpha|$

Exercice 03: (2,5 points)

Soit a un réel strictement positif $(a>0)$.

1. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$; $\dfrac{x-a}{x}<\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)<\dfrac{x-a}{a}$
2. En déduire que pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{a},+\infty\right[$; $\dfrac{ax-1}{ax}-\ln a<\ln(x)<ax-1-\ln a$
3. En déduire que pour $x\in]0,+\infty[$: $\dfrac{x-1}{x}\leq\ln(x)\leq x-1$

Exercice 04: (8,5 points)

Première partie :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{1+x^2}$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

2. a) Montrer que pour tout $x>0$: $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction g

3. a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$

   b) Vérifier que: $0,50<\alpha<0,51$

   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $]0,+\infty[$.

Deuxième partie :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=2cm$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; Puis donner une interprétation géométrique à ce résultat.

2. a) Montrer que f est continue à droite en 0.

   b) Étudier la dérivabilité à droite en 0, puis donner une interprétation géométrique à ce résultat.

3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   c) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. Puis en déduire que $0,80<f(\alpha)<0,81$

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(1;f(1))$

   b) Vérifier que le point $A(1;f(1))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

5. a) Montrer que la restriction h de la fonction f à $[\alpha,+\infty[$ est une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur un intervalle J qu'il faut préciser.

   b) Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la tangente (T), la courbe (C_f) et la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction réciproque de h.