

|                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 16 juin 2020<br>2SM                                                                            | Examen Normalisé                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4 heures |
| Les exercices 1, 4 et 5 sont obligatoires<br>Un seulement des exercices 2 et 3 est obligatoire |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |          |
|                                                                                                | <p><b><u>Exercice1: (3,5 pts)</u></b></p> <p>1) On considère dans <math>\mathbb{C}</math> l'équation (E): <math>z^2 - (5-i)z + 8-i = 0</math></p> <p>0.25 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est <math>(1-3i)^2</math></p> <p>0.5 b) Déterminer les solutions de l'équation (E)</p> <p>Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct <math>(O, \vec{u}, \vec{v})</math></p> <p>On considère les points A, B et C d'affixes respectifs <math>a=1</math>, <math>b=3-2i</math> et <math>c=2+i</math> et soit R la rotation de centre A et d'angle <math>\frac{\pi}{2}</math></p> <p>0.25 2) Ecrire l'expression complexe de la rotation R</p> <p>0.5 3) Déterminer l'affixe du point D image du point B par la rotation R, et vérifier que C est le milieu du segment [AD]</p> <p>4) On considère l'application f qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que: <math>z' = -i\bar{z} + 1 + i</math> et soit K le milieu du segment [MM']</p> <p>0.5 a) Montrer que les points A, B et K sont alignés.</p> <p>0.5 b) Montrer que les droites (MM') et (AB) sont perpendiculaires.</p> <p>0.5 c) Montrer que l'expression complexe de l'application <math>f \circ R</math> est: <math>z' = -\bar{z} + 2</math></p> <p>0.5 d) Montrer que tout point de la droite d'équation <math>x=1</math> est invariant par l'application <math>f \circ R</math></p> |          |
|                                                                                                | <p><b><u>Exercice2: (3,5 pts)</u></b></p> <p>On considère dans <math>\mathbb{R}</math> la loi de composition interne * définie par :</p> $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = xy - 2x - 2y + 6$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |          |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.75                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.                                                                                                        |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.                                                                                                               |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | 3) Déterminer l'ensemble des nombres réels qui sont symétrisables pour la loi $*$                                                                                |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4) Montrer que l'intervalle $I = ]2, +\infty[$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, *)$                                                                        |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5) On considère l'application $f$ définie de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $I$ par: $f(x) = \frac{1}{x} + 2$                                                            |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | a) Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ vers $(I, *)$                                                                              |
| 0.25                                                                                                                                                                                                                                                                             | b) En déduire. que $(I, *)$ est un groupe commutatif                                                                                                             |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | c) Résoudre dans $I$ l'équation: $\underbrace{x * x * \dots * x}_{10} = 1026$                                                                                    |
| <b><u>Exercice 3: (3,5 pts)</u></b><br>Le nombre 101 est premier , on considère le nombre : $A = 101^{101} - 1$                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1) Vérifier que $A$ est divisible par 2 et 5                                                                                                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2) Soit $p$ un diviseur premier de $A$ tel que $p \geq 7$ et soit $a$ le plus petit entier naturel non nul qui vérifie : $101^a \equiv 1 [p]$                    |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | a) Montrer que : $a \neq 1$                                                                                                                                      |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | b) Montrer que si un nombre $n$ de $\mathbb{N}$ vérifie $101^n \equiv 1 [p]$ alors $a$ divise $n$ (on pourra considérer la division euclidienne de $n$ par $a$ ) |
| 0.5                                                                                                                                                                                                                                                                              | c) Montrer que: $a = 101$                                                                                                                                        |
| 0.75                                                                                                                                                                                                                                                                             | d) Montrer que : $101^{p-1} \equiv 1 [p]$ puis que : $p \equiv 1 [101]$                                                                                          |
| 0.75                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3) Le nombre 409 est premier                                                                                                                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Donner en fonction de $A$ les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $409x - Ay = 0$                                                                      |
| <b><u>Exercice4 : (8 pts)</u></b><br><u>Partie 1 :</u><br>On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{4}{x} \sqrt{\ln(x)}$<br>et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ( $\ \vec{i}\  = \ \vec{j}\  = 1\text{cm}$ ) |                                                                                                                                                                  |

|                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.5                                                                                                                                             | 1) Montrer que le domaine de définition de la fonction $f$ est $[1, +\infty[$                                                                                           |
| 0.5                                                                                                                                             | 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.                                                                      |
| 0.75                                                                                                                                            | 3) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.                                                          |
| 0.75                                                                                                                                            | 4) Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que :<br>$(\forall x \in ]1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{2}{x^2 \sqrt{\ln(x)}} (1 - 2 \ln(x))$     |
| 0.5                                                                                                                                             | 5) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$                                                                                                                  |
| 0.5                                                                                                                                             | 6) Tracer la courbe (C) ( on prend : $\sqrt{e} = 1,6$ et $\frac{4}{\sqrt{2e}} = 1,7$ )                                                                                  |
| 0.5                                                                                                                                             | 7) Calculer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$                              |
| <b>Partie 2 :</b>                                                                                                                               |                                                                                                                                                                         |
| Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$                                                                                                               |                                                                                                                                                                         |
| On considère la fonction $f_n$ définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{4}{x} \sqrt{(\ln(x))^n}$                                        |                                                                                                                                                                         |
| 0.5                                                                                                                                             | 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$                                                                                                              |
| 0.5                                                                                                                                             | 2) a) Montrer que : $(\forall x \in ]1, +\infty[) \quad f'_n(x) = \frac{4}{x^2} \left( \frac{n}{2} - \ln(x) \right) (\ln(x))^{\frac{n}{2}-1}$                           |
| 0.5                                                                                                                                             | b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f_n$                                                                                                                |
| 0.5                                                                                                                                             | c) Montrer qu'il existe un seul réel $a_n$ de $]1, e[$ tel que: $f_n(a_n) = 1$                                                                                          |
| 0.5                                                                                                                                             | 3) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad f_{n+1}(a_n) = \sqrt{\ln(a_n)}$                                                                        |
| 0.75                                                                                                                                            | b) En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est croissante puis qu'elle est convergente.                                                                              |
| 0.75                                                                                                                                            | c) Montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad \ln(\ln(a_n)) = \frac{2}{n} (\ln(a_n) - \ln(4))$ , puis en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ |
| <b><u>Exercice 5: (5pts)</u></b>                                                                                                                |                                                                                                                                                                         |
| On considère la fonction $h$ définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{\ln(t)} dt & ; x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$ |                                                                                                                                                                         |

|      |                                                                                                                                                  |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|      | 1) On considère la fonction $u$ définie sur $[0;1[$ par : $\begin{cases} u(x) = \frac{x}{\ln(x)} ; x \neq 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$             |
| 0.5  | Montrer que la fonction $u$ est continue sur $[0;1[$                                                                                             |
| 0.5  | 2) Montrer que la fonction $h$ est définie sur $[0;1[$                                                                                           |
| 0.5  | 3) a) Montrer que : $(\forall x \in ]0;1[)(\exists c \in [0;x]) h(x) = u(c)$                                                                     |
| 0.5  | b) En déduire que la fonction $h$ est continue à droite en zéro.                                                                                 |
|      | 4) Pour tout $x$ de $[0;1[$ , on pose : $\varphi(\alpha) = \alpha^2 \int_0^x u(t) dt - x^2 \int_0^\alpha u(t) dt$                                |
| 0.75 | a) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $\varphi$ , montrer que : $(\exists \beta \in ]0;x[) \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2 \ln \beta}$ |
| 0.5  | b) En déduire que la fonction $h$ est dérivable à droite en zéro                                                                                 |
| 0.5  | 5) a) Montrer que : $\left( \forall t \in \left[ \frac{2}{3}; 1 \right[ \right) \frac{3}{2}(t-1) \leq \ln(t)$                                    |
| 0.5  | b) En déduire la limite : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x)$                                                                      |
| 0.75 | 6) Montrer que la fonction $h$ est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x$ de $]0;1[$                                            |