

guessmaths

Correction Examen nationale 2022 Session de Rattrapage

2ème Bac SM A et B

Exercice 1:

A- 1- On considère la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$; comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $h'(x) = e^x - 1$; ainsi $h'(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $h'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$

Donc h est décroissante sur $]-\infty, 0]$; d'où $\forall x \in]-\infty, 0] ; h(x) \geq h(0)$

h est croissante sur $[0, +\infty[$; d'où $\forall x \in [0, +\infty[; h(x) \geq h(0)$

et $h(0) = 0$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) ; h(x) \geq 0$

Càd $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - 1 - x \geq 0$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + x \leq e^x$

2- a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$; alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et d'après la question précédente on a :

$$1 + (-x) \leq e^{-x} ; \text{ donc } 1 - e^{-x} \leq x$$

$$\text{D'autre part } x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow -x \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - e^{-x}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{0 \leq 1 - e^{-x} \leq x}$$

b) 1ère Méthode

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; on a : $\forall t \in [0, x] ; 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$

$$\bullet \text{ Donc } 0 \leq \int_0^x 1 - e^{-t} dt \leq \int_0^x t dt \Rightarrow 0 \leq [t + e^{-t}]_0^x \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq x + e^{-x} - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq 1 - x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - x - e^{-x} + \frac{x^2}{2}$$

$$\bullet \text{ On a : } 0 \leq t + e^{-t} - 1 \leq \frac{t^2}{2} \Rightarrow 0 \leq \int_0^x (t + e^{-t} - 1) dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[\frac{t^2}{2} - e^{-t} - t \right]_0^x \leq \left[\frac{t^3}{6} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{2} - e^{-x} - x + 1 \leq \frac{x^3}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$

2ème Méthode

- $\varphi_1 : x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$\varphi_1'(x) = -1 + x + e^{-x}$; et d'après la question précédente on a :

$$1 - e^{-x} \leq x \Rightarrow -1 + x + e^{-x} \geq 0 \\ \Rightarrow \varphi_1'(x) \geq 0$$

Donc φ_1 est croissante sur $\mathbb{R}^+$; ainsi $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) \geq \varphi_1(0) \quad \text{et } \varphi_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

- $\varphi_2 : x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \frac{x^3}{6}$

φ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\varphi_2'(x) = -1 + x + e^{-x} - \frac{x^2}{2} \\ = -\varphi_1(x) \leq 0$$

Donc φ_2 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$; ainsi $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) \leq \varphi_2(0) \quad \text{et } \varphi_2(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \frac{x^3}{6} \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$$

On En déduit que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}}$

c) Pour tout $x > 0$; on a :

$$0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6} \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq 1 - x - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} \leq \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$; donc par la propriété des limites et encadrement on

déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

B- $(\forall x \in I = [0, +\infty[) f : \begin{cases} f(0)=1 \\ f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1- a) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-2x} \times \frac{e^x - 1}{x} \right) = 1 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1)$

Et $f(0)=1$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0.

b) Pour tout $x > 0$; $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} - 1}{x}$
 $= \frac{e^{-x} - e^{-2x} - x}{x^2}$
 $= \frac{1 - 2x - e^{-2x} - 1 + e^{-x} - x + 2x}{x^2}$
 $= \frac{(1 - 2x - e^{-2x}) - (1 - e^{-x} - x)}{x^2}$
 $= \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

Donc $(\forall x > 0) ; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

c) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \times \frac{1-2x-e^{-2x}}{(2x)^2} = -2$

On pose $t = 2x$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} \right)$
 $= -2 - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\frac{3}{2}$

On en déduit que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\left(-\frac{3}{2} \right)$.

2- a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{Et pour tout } x > 0 ; \text{ on a : } f'(x) &= \frac{x(-e^{-x} + 2e^{-2x}) - (e^{-x} - e^{-2x})}{x^2} \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^2} (-xe^x + 2x - e^x + 1) \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x(1+x))
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall x > 0 ; \boxed{f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x(1+x))}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Et pour tout } x > 0 ; \text{ on a : } f'(x) + e^{-2x} &= \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x(1+x)) + e^{-2x} \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x(1+x) + x^2) \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^2} ((x+1)^2 - e^x(1+x)) \\
 &= \frac{(1+x)e^{-2x}}{x^2} (x+1-e^x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De plus pour tout } x > 0 ; \text{ on a : } 1 - e^x \leq -x &\Rightarrow 1+x \leq e^x \\
 &\Rightarrow 1+x - e^x \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(x) + e^{-2x} \leq 0$$

$$\text{Par suite : } \forall x > 0 ; f'(x) \leq -e^{-2x}$$

$$\text{c) On a : } \forall x > 0 ; f'(x) \leq -e^{-2x} \text{ et } e^{-2x} > 0 ; \text{ donc } \forall x > 0 ; f'(x) < 0$$

D'où f est strictement décroissante sur I .

$$\text{3- On admet que : } \forall x > 0 ; f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2))$$

$$\text{a) On considère la fonction } \varphi : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x$$

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$; en particulier sur $\mathbb{R}^+$; et pour tout $x > 0$; on a :

$$\varphi'(x) = 1 + x - e^x \leq 0 ; \text{ d'après ce qui précède}$$

Donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{D'où : } \varphi(x) \leq \varphi(0) = 0 ; \text{ ainsi } 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x \leq 0$$

$$\text{Par conséquent : } \forall x \geq 0 ; \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x}$$

$$\text{b) On a : } \forall x > 0 ; f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2))$$

Donc $f''(x)$ est du même signe que $-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2)$

D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0; \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) &\leq e^x \Rightarrow 2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2 \leq 2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^x \\
&\Rightarrow 2\left(1+x^2+\frac{x^4}{4}+2x+x^2+x^3\right) \leq (2+2x+x^2)e^x \\
&\Rightarrow \left(2+4x^2+\frac{x^4}{2}+4x+2x^3\right) \leq (2+2x+x^2)e^x \\
&\Rightarrow \frac{x^4}{2}+2x^3 \leq -(2+4x^2+4x)+(2+2x+x^2)e^x \\
&\Rightarrow \frac{x^4}{2}+2x^3 \leq -4x^2-4x-2+(2+2x+x^2)e^x
\end{aligned}$$

Or $x \geq 0$; donc $\frac{x^4}{2}+2x^3$

D'où $-4x^2-4x-2+(2+2x+x^2)e^x \geq 0$

On déduit que : $\forall x > 0$; $f''(x) > 0$

4- On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x+1-e^x(1+x)) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} (2xe^{-2x}+e^{-2x}-e^{-x}-xe^{-x}) = 0
\end{aligned}$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$)

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

b) D'après ce qui précède on sait que f' est croissante sur I ; donc :

Pour $x \in I$; $f'(x) \in f'(I) \Rightarrow f'(x) \in f'([0, +\infty[)$

$$\Rightarrow f'(x) \in \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right[$$

$$\Rightarrow f'(x) \in \left] -\frac{3}{2}, 0 \right[$$

Donc $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
5- a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} - \frac{2}{2xe^{2x}} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x} = +\infty)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Interprétation géométrique

La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

b) Tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	1	0

c) La demi-tangente au point $T(0,1)$ a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$

Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)$

On considère la fonction : $\psi(x) = f(x) + \frac{3}{2}x - 1$

ψ est continue et dérivable sur I ; et Pour tout $x \in I$; on a :

$$\psi'(x) = f'(x) + \frac{3}{2} \geq 0 \quad (\text{car } -\frac{3}{2} \leq f'(x) \leq 0)$$

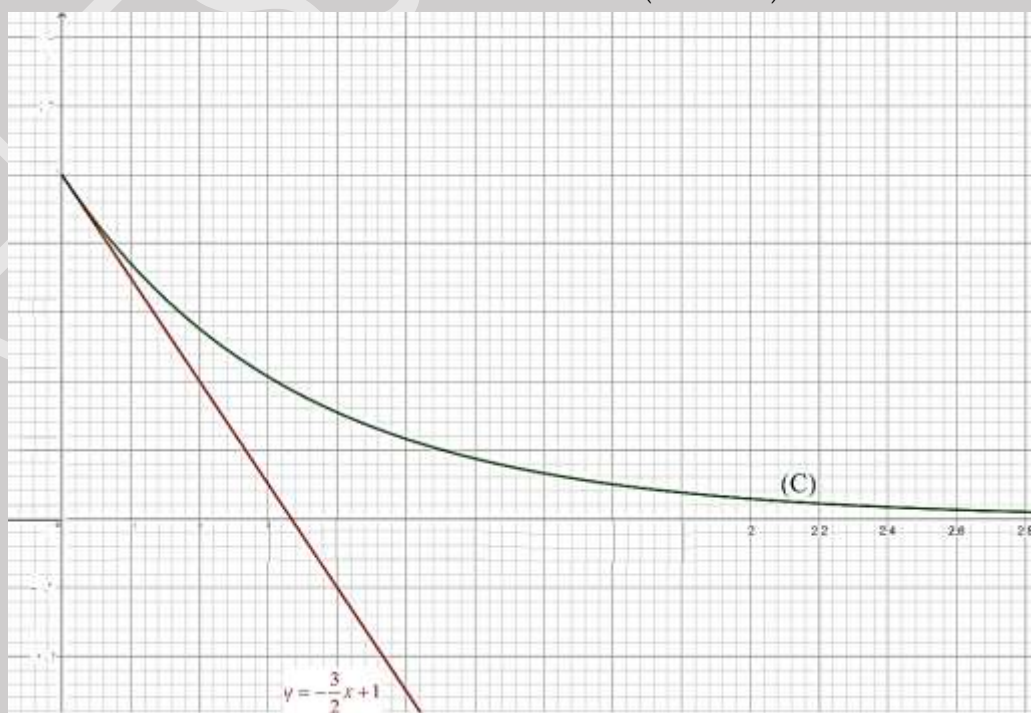
Donc ψ est croissante sur I ; d'où : $(\forall x \in I) ; \psi(x) \geq \psi(0)$ et $\psi(0) = f(0) - 1 = 0$

D'où $(\forall x \in I) ; \psi(x) \geq 0$

Par suite $(\forall x \in I) ; f(x) \geq -\frac{3}{2}x + 1$

La courbe (C) est au-dessus la demi-tangente au point $T(0,1)$

d) Représentation de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



C- 1- Pour tout $x \in [0,1]$; on pose $g(x) = f(x) - x$

a) g est continue et dérivable sur I en particulier sur $[0,1]$ (somme de deux fonctions continues et dérivables sur I) ; et on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question B-2)b) on a : $\forall x > 0 ; f'(x) < 0$

D'où pour tout $x \in [0,1]$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$

Ainsi g est strictement décroissante sur $[0,1]$

Par suite elle est une bijection de $[0,1]$ vers $J = g([0,1]) = [g(1), g(0)]$
$$= [e^{-2}(e-1) - 1, 1].$$
$$= \left[\left(\frac{e-1}{e^2} \right) - 1, 1 \right].$$

b) g est une bijection de $[0,1]$ vers $\left[\left(\frac{e-1}{e^2} \right) - 1, 1 \right]$ et $0 \in \left[\left(\frac{e-1}{e^2} \right) - 1, 1 \right]$

Donc d'après le théorème de la bijection : $(\exists! \alpha \in [0,1]) / g(\alpha) = 0$

Donc il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$; tel que : $f(\alpha) = \alpha$

2- Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in \{0,1,\dots,n\}$; on considère les

nombre réels $x_k = \frac{k\alpha}{n}$; et on pose $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$ et $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$

$$\begin{aligned} \text{a) On a : } |J_k - I_k| &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{f(x_k) - f(t)}{x_k - t} \right) (x_k - t) dt \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_k - t) dt \right| \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left| \frac{f(x_k) - f(t)}{x_k - t} \right| = \left| \frac{f(t) - f(x_k)}{t - x_k} \right| \leq \frac{3}{2} \text{ (d'après la question B-4)b) on a : } |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |J_k - I_k| &\leq \frac{3}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_k - t) dt \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_k - t) dt \right| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x_k - t| dt \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$$

$$\text{Par conséquent } \forall k \in \{0,1,\dots,n\} ; \boxed{|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt}$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ On } a : \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt &= \left[\frac{1}{2} (t - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k)^2 - (x_k - x_k)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(k+1)\alpha}{n} - \frac{k\alpha}{n} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\forall k \quad |J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$$

$$\text{Donc : } \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} ; \quad \boxed{|J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2}$$

3- On pose : $L = \int_0^\alpha f(t) dt$

$$\begin{aligned}
 a) \text{ On } a : \bullet \quad I_k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \int_0^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \int_0^{x_n} f(t) dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \int_0^\alpha f(t) dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} I_k = L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad J_k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} J_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} J_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 dt \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} J_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} J_k = \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\alpha k}{n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'une part } |J_k - I_k| &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |J_k - I_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2 \\
 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |J_k - I_k| \leq n \times \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n}$$

$$\text{D'autre part } \left| \sum_{k=0}^{n-1} (J_k - I_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |J_k - I_k|$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \left| \sum_{k=0}^{n-1} (J_k - I_k) \right| &\leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n} \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1} J_k - \sum_{k=0}^{n-1} I_k \right| \leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n} \\ &\Rightarrow \left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n}$$

$$b) \text{ Comme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n} \right) = 0 ; \text{ donc on en déduit que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = L$$

$$\text{Par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^\alpha f(t) dt$$

Exercice 2 :

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Première partie :

$$(E_m) : mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 1- a) \text{ Le discriminant de l'équation } (E_m) \text{ est : } \Delta &= (m-1)^2 ((m-1)^2 + 4m) \\ &= (m-1)^2 (m+1)^2 \\ &= ((m-1)(m+1))^2 \\ &= (m^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\Delta = (m^2 - 1)^2}$$

b) D'où les solutions de l'équation (E_m) sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(m-1)^2 - (m^2 - 1)}{2m} & \text{et} & \quad z_2 = \frac{(m-1)^2 + (m^2 - 1)}{2m} \\ z_1 &= \frac{m^2 - 2m + 1 - m^2 + 1}{2m} & \text{et} & \quad z_2 = \frac{m^2 - 2m + 1 + m^2 - 1}{2m} \\ z_1 &= \frac{1 - m}{m} & \text{et} & \quad z_2 = m - 1 \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \frac{1-m}{m}, m-1 \right\}$

2- $m = e^{i\theta}$; avec $0 < \theta < \pi$

Alors • $z_1 = \frac{1-m}{m}$

$$= \frac{1-e^{i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)}{e^{i\theta}}$$

$$= -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$$

et comme $0 < \theta < \pi$; $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$; donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Par suite $z_1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

• $z_2 = m-1$

$$= e^{i\theta} - 1$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$$

et comme $0 < \theta < \pi$; $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$; donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Par suite $z_2 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

Deuxième partie :

$A(m-1)$ et $B\left(\frac{1}{m}-1\right)$

$$1- \text{ On a : } \frac{\frac{m-1}{m} - 1}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{m(m-1)}{1-m} = -m$$

$$\text{Donc } \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = -m$$

D'où les points O ; A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

2- On suppose que m n'est pas un réel.

Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Et soient $P(p)$; $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AD]$ et $[OB]$

a) • C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; donc :

$$\begin{aligned} z_C - z_A &= (z_B - z_A) e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_C = (z_B - z_A) e^{i\frac{\pi}{3}} + z_A \\ &\Leftrightarrow z_C = \left(\frac{1}{m} - 1 - m + 1 \right) e^{i\frac{\pi}{3}} + m - 1 \\ &\Leftrightarrow z_C = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc l'affixe du point } C \text{ est } \boxed{c = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

• D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$; donc :

$$\begin{aligned} z_D - z_O &= (z_A - z_O) e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_D = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow z_D = (m - 1) e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'affixe du point } D \text{ est } \boxed{d = (m - 1) e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

b) On a : • $P(p)$ milieu du segment $[AC]$; donc

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{z_A + z_C}{2} \Rightarrow p = \frac{m - 1 + m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \\ &\Rightarrow 2p = 2(m - 1) + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

• $Q(q)$ milieu du segment $[AD]$; donc

$$z_q = \frac{z_A + z_D}{2} \Rightarrow q = \frac{m - 1 + (m - 1) e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow 2q = (m-1) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 \right)$$

• $\mathcal{R}(r)$ milieu du segment $[OB]$; donc

$$z_R = \frac{z_B + z_O}{2} \Rightarrow 2r = \left(\frac{1}{m} - 1 \right)$$

Donc • $2(p-r) = 2(m-1) + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - 1 \right)$

$$= 2m - 2 - \frac{1}{m} + 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= m - 1 - \frac{1}{m} + m + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= m - 1 - \left(\frac{1}{m} - m \right) + \left(\frac{1}{m} - m \right) e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right)$$

D'où $2(p-r) = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right)$

• $2(q-r) = (m-1) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 \right) - \left(\frac{1}{m} - 1 \right)$

$$= (m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} + m - 1 - \frac{1}{m} + 1$$

$$= (m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} + m - \frac{1}{m}$$

$$= (m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m \right)$$

D'où $2(q-r) = (m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m \right)$

c) On a : $e^{i\frac{\pi}{3}} (p-r) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \left(m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \right) \right)$

$$= \frac{1}{2} \left((m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{1}{m} - m \right) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((m-1) e^{i\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{1}{m} - m \right) \left(\underbrace{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}_{-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}(2(q-r))$$

$$= q-r$$

Donc $\boxed{q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)}$

$$d) \text{ On a : } q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r) \Rightarrow \begin{cases} |q-r| = |p-r| \\ \arg\left(\frac{q-r}{p-r}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} RQ = RP \\ \overrightarrow{(RQ; RP)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 3:

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif non intègre d'unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $G = \{M(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

1- $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
 $a \mapsto \varphi(a) = M(a)$

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; on a :

$$\varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+1 & 3 & -1 \\ 2b+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1+3(b+1)-(2b+3) & 9-6 & -3+2 \\ 2a+3+6(b+1)-2(2b+3) & 18-12 & -6+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+1 & 3 & -1 \\ 2a+3+6b+6-4b-6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+1 & 3 & -1 \\ 2a+3+6b+6-4b-6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (a+b)+1 & 3 & -1 \\ 2(a+b)+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
&= M(a+b) \\
&= \varphi(a+b)
\end{aligned}$$

Donc $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) ; \varphi(a+b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$

D'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$; on a : $\varphi(\mathbb{R}) = \{\varphi(a) / a \in \mathbb{R}\}$
 $= \{M(a) / a \in \mathbb{R}\} = G$

Donc $\boxed{\varphi(\mathbb{R}) = G}$

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ; alors par homomorphisme

$(\varphi(\mathbb{R}), \times) = (G, \times)$ est un groupe commutatif.

c) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e+1 & 3 & -1 \\ 2e+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ l'élément neutre de $(G, \times)$

On a : $M(x) \times M(e) = M(e) \times M(x) = M(x)$

$$\Rightarrow M(x+e) = M(x)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+e+1 & 3 & -1 \\ 2x+2e+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 3 & -1 \\ 2x+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+e+1 = x+1 \\ 2x+2e+3 = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow e = 0$$

Donc $J = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(G, \times)$

d) Soit $a \in \mathbb{R}$ on a : $M(a) = \varphi(a)$ et le symétrique de a dans $(\mathbb{R}, +)$ est $(-a)$; alors par homomorphisme le symétrique de $M(a)$ dans $(G, \times)$ est $\varphi(-a) = M(-a)$

e) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 3 & -1 \\ 2x+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ solution de l'équation on a :

1ère Méthode

$$M(1) \times X = M(2) \Leftrightarrow M(1+X) = M(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1+1 & 3 & -1 \\ 2(x+1)+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+1 & 3 & -1 \\ 2 \times 2+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & -1 \\ 2x+5 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ 2x+5=7 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \quad \text{Donc } \boxed{S = \{M(1)\}}$$

2ème Méthode

Soit on a : $M(1) \times X = M(2) \Leftrightarrow X = M(-1) \times M(2)$ (où $M(-1)$ est le symétrique de $M(-1)$ dans $(G, \times)$; donc : $M(1) \times X = M(2) \Leftrightarrow X = M(2-1)$

$$\Leftrightarrow X = M(1)$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{M(1)\}}$$

2- a) Soit $a \in \mathbb{R}$; on a :

$$\begin{cases} M(a) \times J = M(a) & \text{car } J \text{ est l'élément neutre dans } (G, \times) \\ M(a) \times I = M(a) & \text{car } I \text{ est l'élément neutre dans } (M_3(\mathbb{R}), \times) \end{cases}$$

Donc $(\forall a \in \mathbb{R}) ; M(a) \times J = M(a) \times I$.

b) Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M(a)$ soit inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

et soit $[M(a)]^{-1}$ son inverse ; on aura donc :

$$M(a) \times J = M(a) \times I \Leftrightarrow [M(a)]^{-1} \times M(a) \times J = [M(a)]^{-1} \times M(a) \times I \\ \Leftrightarrow J = I$$

$$(\text{ce qui est absurde car } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Donc $(\forall a \in \mathbb{R}) ; M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$M(1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & -1 \\ 3x+5 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+2 & 3 & -1 \\ 2+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix} = M(2)$$

D'où les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; avec $x \in \mathbb{R}$ sont des solutions dans

$(M_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

Exercice 4 :

1- On a : $121 < 137 < 144 \Rightarrow 11 < \sqrt{137} < 12$

Et aucun nombre premier inférieur à 11 ne divise 137

$$137 \equiv 1[2]; 137 \equiv 2[3]; 137 \equiv 2[5]; 137 \equiv 4[7]; 137 \equiv 5[11]$$

Donc 137 est un nombre premier.

$$2- 38u + 136v = 2 [137] \Leftrightarrow 19u + 68v = 1 [137]$$

Et on a : $68 = 3 \times 19 + 11$ et le plus petit multiple de 11 qui est congru à 1 modulo 19 est 77 ($77 = 4 \times 19 + 1$)

$$D'où $7 \times 68 = 7 \times 3 \times 19 + 77 \Rightarrow 7 \times 68 = 21 \times 19 + 4 \times 19 + 1$$$

$$\Rightarrow 7 \times 68 = 25 \times 19 + 1$$

$$\Rightarrow 19 \times (-25) + 7 \times 68 = 1$$

$$\Rightarrow 38 \times (-25) + 7 \times 136 = 2$$

Donc le couple $(-25, 7)$ vérifie l'équation $38u + 136v = 2 [137]$

3- Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$

a) Montrons que x et 137 sont premiers entre eux.

Posons $d = x \wedge 137$

Donc $d \mid x$ et $d \mid 137$

$$D'où $d \mid x^{38}$ et $d \mid 137$; or $x^{38} \equiv 1[137] \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x^{38} - 1 = k137$$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / 1 = x^{38} - k137$$

Ainsi $d \mid 1$

Par suite $d = 1$; on conclut que x et 137 sont premiers entre eux.

b) Montrons que, $x^{136} \equiv 1[137]$

D'après la question précédente x et 137 sont premiers entre eux ; de plus 137 est un nombre premier.

Donc en appliquant le petit Théorème de FERMAT on a : $x^{137-1} \equiv 1[137]$

$$\text{Càd } \boxed{x^{136} \equiv 1[137]}$$

c) D'après la question 2) on a : $38 \times (-25) + 7 \times 136 = 2 \Rightarrow 7 \times 136 = 38 \times 25 + 2$

$$\text{et } x^{136} \equiv 1[137] \Rightarrow (x^{136})^7 \equiv 1[137]$$

$$\Rightarrow x^{136 \times 7} \equiv 1[137]$$

$$\Rightarrow x^{38 \times 25 + 2} \equiv 1[137]$$

$$\Rightarrow x^{38 \times 25} \times x^2 \equiv 1[137]$$

D'autre part on a : $x^{38} \equiv 1[137]$ et x et 137 sont premiers entre eux ; alors

$$\begin{cases} x^{38} \equiv 1[137] \\ x^{38 \times 25} \times x^2 \equiv 1[137] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{38 \times 25} \equiv 1[137] \\ x^{38 \times 25} \times x^2 \equiv 1[137] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 \equiv 1[137]}$$

$$4- (E) : x^{19} \equiv 1[137]$$

Soit x solution de l'équation (E) on a alors : $x^{19} \equiv 1[137] \Rightarrow x^{38} \equiv 1[137]$

D'après la question précédente on a alors $x^2 \equiv 1[137]$

D'où $x \equiv 1[137]$ ou $x \equiv -1[137]$

Réciproquement

- Soit $x \equiv 1[137]$; alors $x^{19} \equiv 1[137]$; donc x est solution de (E)
- Soit $x \equiv -1[137]$; alors $x^{19} \equiv -1[137]$; donc x n'est pas solution de (E) ; sinon on aurait

$$\begin{cases} x^{19} \equiv 1[137] \\ x^{19} \equiv -1[137] \end{cases} \Rightarrow 1 \equiv -1[137]$$

$$\Rightarrow 2 \equiv 0[137]$$

$$\Rightarrow 137 \mid 2 \text{ ce qui est absurde.}$$

On conclut que les solutions de l'équation (E) sont les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv 1[137]$