Série n°8 Exercices sur « Etude de fonction Exponentielle »

2éme Bac SM

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n. on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\dfrac{-2e^x}{1+e^x}+nx$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.(On prendra $\|\vec{i}\|=1cm$

Partie 1

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-nx+2\right)$ *; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

b) Montrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une asymptote (Δ) dont on déterminera une équation cartésienne.

2- a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f_n'(x)=\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}+n$

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}\leq 1$

c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

(On distinguera les deux cas : $n=0$ et $n\geq 1$)

3- a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0.

b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

4- Représenter graphiquement dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les deux courbes (C_0) et (C_2).

5- Pour tout réel $t>0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine du plan limité par (C_n) et les droites d'équations respectives : $y=nx-2$; $x=0$ et $x=t$.

a) Calculer $A(t)$ pour tout $t>0$.

b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f_0(u_n) & (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

1- a) Montrer que l'équation $f_0(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $|f_0'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$

2- a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n\geq 2$.

1- a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x)=0$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$; $0<x_n<1$ (On prendra $\dfrac{2e}{1+e}<1{,}47$)

2- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

3- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$

4- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$