



Exercice 1 sur « limites et continuité »

Exercice 1:

Donner les limites suivantes. Détaillez les justifications sur et faites apparaître éventuellement les règles opératoires.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 3}{3x^2 + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{3 - x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

Correction Exercice 1

Rappel les formes indéterminées dans un calcul de limite : " $(+\infty) + (-\infty)$ " ; " $\frac{+\infty}{+\infty}$ " ; " $\frac{0}{0}$ " et " $0 \times \pm\infty$ ".

Pour calculer une limite il faut commencer par remplacer la valeur pour laquelle la limite est demandée dans l'expression donnée, si le résultat trouvé ne présente pas de forme indéterminée alors on arrête et c'est la valeur demandée mais si après la première étape on obtient une des formes indéterminées alors il faut trouver une méthode pour enlever cet indétermination ; c'est ce qu'on essaiera d'apprendre à travers la correction de ces exercices :

$$1) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2}$$

Pour une limite à l'infini d'une expression rationnelle avec un polynôme au dénominateur et au numérateur on applique la règle du terme de plus haut degré ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 7x^2 - 5}{1 + x + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$$

$$2) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 3}{3x^2 + 1}$$

En appliquant la règle du terme de plus haut degré ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 3}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{3x} = 0$$

$$3) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{3 - x}$$

En remplaçant x par 3 dans $\frac{-5x}{3-x}$ on obtient (-15) au numérateur et 0^+ au dénominateur ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x}{3-x} = -\infty.$$

4) Calculons $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}$

En remplaçant x par (-3) dans $\frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}$ on obtient (12) au numérateur et 0 au dénominateur ; mais pour déterminer si on a un 0^+ ou un 0^- il faut étudier le signe de $x^2 + 4x + 3$ à droite de (-3) ; dans notre

cas on a 0^- ; alors : $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$

5) Calculons $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3}$

De la même manière que précédemment on obtient : (8) au numérateur et 0^+ au dénominateur ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$$

6) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$

Dans ce cas on applique la définition de limite de fonction composée ; $x \mapsto \frac{1-x}{x+2}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$; on

dira que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x+2} = 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 ; alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = \sqrt{0} = 0$

7) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$

1ère méthode

C'est commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x}$ puis simplifier l'expression :

Soit $x > 0$; on a : $\frac{2x-1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \text{ (Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) = +\infty \text{).}$$

2ème méthode

Procéder par un changement de variable puis appliquer la règle du plus haut degré :

On pose : $t = \sqrt{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^2-1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2t = +\infty.$$

8) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$

Pour tout $x > 0$; on a : $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+4)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+8x+16}}$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+8x+16} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$; et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1 ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+8x+16}} = \sqrt{1} = 1$$

9) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2}$

On applique la règle du plus haut degré car il s'agit d'une limite en l'infini d'un quotient de deux

polynômes ; on alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{-3\cancel{x^2}} = -\frac{2}{3}$.

10) Calculons $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow -2^+} x+2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} 1-x = 3$ donc : $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = +\infty$

En appliquant les règles de limite de fonction composée par la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{x+2}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

On obtient $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = +\infty$

11) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$

Pour tout $x < 0$; on a : $x+4 = -\sqrt{(x+4)^2} = -\sqrt{x^2+8x+16}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2+8x+16}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+8x+16}}$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+8x+16} = 1$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1 ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4} = -\sqrt{1} = -1.$$

12) Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

En remplaçant x par 3 dans l'expression on obtient une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ " dans ce cas puisqu'on

le numérateur de la forme $(a-b)$ avec $a = \sqrt{x+6}$ et $b = 3$; alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $(a+b)$ c.à.d $(\sqrt{x+6}+3)$; alors Pour tout $x \neq 3$; on a :

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} &= \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{\cancel{x+6} - 9}{(\cancel{x-3})(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x+6}+3)} \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{6}$

13) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1$

Dans ce cas en remplaçant x par $+\infty$; on obtient une forme indéterminée " $(+\infty) - (+\infty)$ "; alors pour enlever la forme indéterminée on procède en deux étapes ; la première c'est de multiplier par le conjugué de $\sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = \sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1)$ et diviser par cette même quantité c.à.d.

$\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)$; puis factoriser par x dans le dénominateur et simplifier l'expression (ceci et parce le coefficient de x^2 à l'intérieure de la racine est égale à celui de x à l'extérieure de la racine) ; on obtient pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 &= \sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - (x + 1))(\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1))}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (x + 1)} \\ &= \frac{x^2 - x + 1 - (x + 1)^2}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)} \\ &= \frac{\cancel{x^2} - x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - 2x - \cancel{1}}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)} \\ &= \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)} = \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{3}{2}$$

14) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x$

Dans ce cas en remplaçant x par $+\infty$; on obtient une forme indéterminée " $(+\infty) - (+\infty)$ "; alors pour enlever l'indétermination il suffit de factoriser par x car le coefficient de x^2 à l'intérieure de la racine est différent de celui de x à l'extérieure de la racine ; alors pour tout $x > 0$; on a :

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) ; \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)$$

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = \sqrt{1} - 2 = -1$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x = -\infty$.

15) Calculons $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+1}-3}$

En remplaçant x par 8 dans l'expression on obtient une indétermination de la forme " $\frac{0}{0}$ "; dans ce cas

puisque l'on a une expression de la forme $\frac{a-b}{c-d}$ alors on multiplie et on divise les conjugués du

numérateur et celui du dénominateur c.à.d on multiplie par $\frac{c+d}{a+b} \times \frac{a+b}{c+d} = 1$; alors pour tout $x \neq 8$;

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+1}-3} &= \frac{(\sqrt{2x-4})(\sqrt{2x+4})}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)} \times \frac{(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x+4})} \\ &= \frac{2x-16}{x+1-9} \times \frac{(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x+4})} \\ &= \frac{2(\cancel{x-8})}{\cancel{x-8}} \times \frac{(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x+4})} \\ &= \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x+4})} \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x+4})} = \frac{2 \times 6}{8} = \frac{3}{2}$.

16) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$

En remplaçant x par $+\infty$ on obtient une forme indéterminée alors pour enlever l'indétermination on simplifie l'expression comme suit ; pour tout $x > 0$; on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}} &= \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x^2-x}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} \\ &= \sqrt{\frac{x+5}{x^2-x}} - \sqrt{\frac{x^2}{x^2-x}} \end{aligned}$$

Et comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$; et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à

droite de 0 et aussi continue en 1 ; alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+5}{x^2-x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2-x}} = 1$; par suite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}} = -1.$$

On peut procéder par une factorisation et simplification par x dans le numérateur et le dénominateur.