Exercice 1

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2-\alpha^2$

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$

1. Exprimer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 2

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$

Montrer que f est définie et dérivable sur R et déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.

b. Déterminer la fonction dérivée g' de g. (on pourra utiliser la question 1.)

c. Etudier le signe de g'.

d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

e. Dresser le tableau des variations de g.

f. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 1.

<u>Exercice 3</u>

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;1]$ par : $f(x)=1+x\ln x$.

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

T est la droite d'équation $y=x$.

1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0;1]$, puis montrer que, pour tout nombre réel $x\in]0;1]$, on a : $f(x)\leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x\in]0;1]$.

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x\in]0;1]$ par : $g(x)=1+x\ln x-x$

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0;1]$ et dresser son tableau de variation.

b. En déduire les positions relatives de la courbe (C) et de la droite T.

<u>Exercice 4</u>

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de Γ.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$.

Démontrer que la tangente T_α à (C) au point d'abscisse α passe par l'origine du repère si et seulement si $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

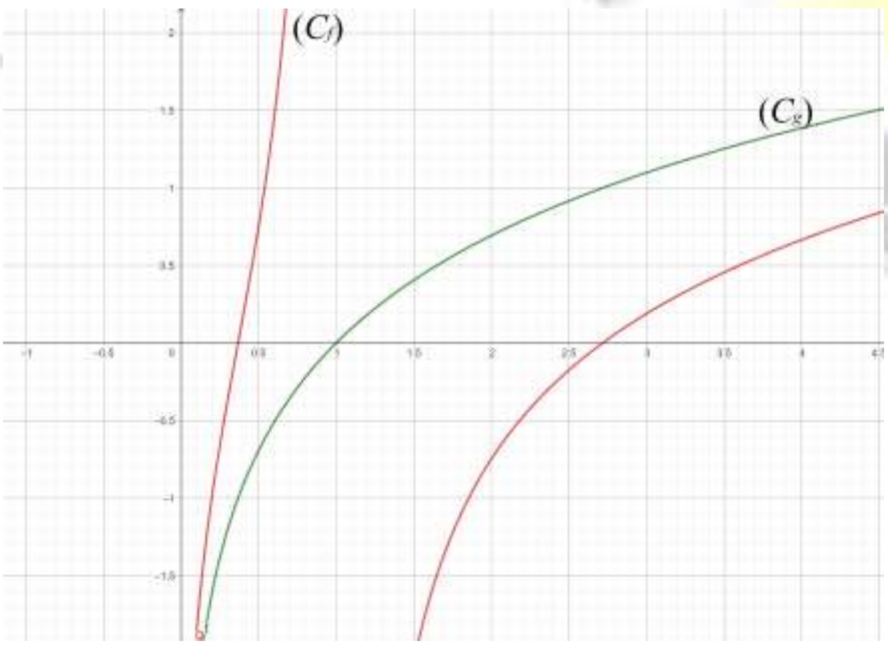
b. Montrer que sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe.

Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.



www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

On note f' *la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle* $\left]0;+\infty\right[$.

On note $\left(C_f\right)$ *la courbe représentative de la fonction f dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. *La courbe* $\left(C_f\right)$ *est représentée en annexe 1*

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 *et en* $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' *de la fonction f pour tout* $x\in\left]0;+\infty\right[$.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

On note $\left(C_g\right)$ *la courbe représentative de la fonction g dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

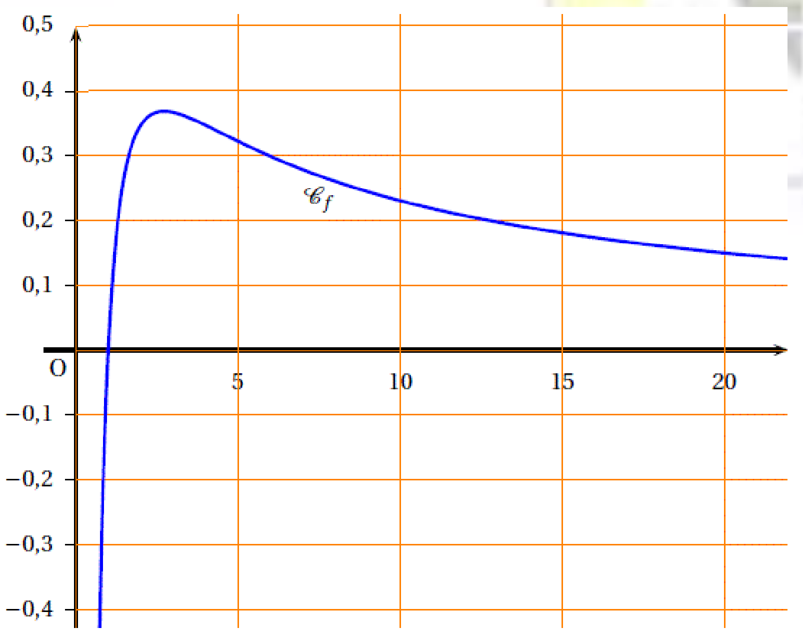
a. Déterminer la limite de g 0 *et en* $+\infty$ ..

b. Calculer la dérivée g' *de la fonction g.*

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que les courbes $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_g\right)$ *possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.*

b. Étudier la position relative des courbes $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_g\right)$.



Exercice 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x^2+4)$.

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$.

   a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   b) Montrer que sur l'intervalle $[2;3]$ l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.

   c) Justifier que le nombre réel a est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=f(u_n)$.
La courbe (C_f) représentative de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y=x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe (C_f) et la droite (Δ), on a placé u_1 sur l'axe des abscisses.
De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2. Placer le point I de la courbe (C_f) qui a pour abscisse α.

3. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $1\le u_n\le\alpha$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

   c) Déterminer sa limite.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1
(à rendre avec la copie)