

Exercice 1: 4, 5pts

Compléter le tableau suivant :

Proposition (P)	La négation de (P)	La vérité de (P)
$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3n+4} \notin \mathbb{N}$		
$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 1 > 0$		
$(\forall x \in]0;1[) : \frac{x}{1-x} < 1$		

Exercice 2: 6pts

2pts 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x = \sqrt{1+x}$

2pts 2) En utilisant le raisonnement par équivalences successives, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2+1} - |x| \leq 1$$

2pts 3) Soit a un nombre réel positif. En utilisant le raisonnement par contraposé, montrer que :

$$3 < a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}} < a+2$$

Exercice 3: 3, 5 pts

Soient a , b et c trois réels strictement positifs tels que: $ab+bc+ca=1$

1,5pts 1) Montrer que: $a^2+b^2 \geq 2ab$, puis déduire que : $a^2+b^2+c^2 \geq 1$

2pts 2) Montrer par l'absurde que : $a+b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $b+c \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $c+a \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 4: 2pts

Montrer que : $(\forall y \in [2; +\infty[) (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2xy + 4 = 0$

Exercice 5: 4pt

1,5pt 1) a- Soit a un réel tel que $a > 0$. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) : (1+a)^n \geq 1+an$

0.5pt b- Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

2pt 2) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1}{8} \in \mathbb{N}$

Exercice 6: 2pts (Bonus)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs $a_1; a_2; \dots$ et a_n on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$$

WWW.GUESSMATHS.CO