

Exercice 1:

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

Montrer : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Exercice 2:

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$

2) Soient a et b deux réels non nuls tels que : $b \neq 2a$

Montrer que : $\left(b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}\right)$

Exercice 3 :

Soient $a ; b$ et c trois réels qui appartiennent à l'intervalle $]0;1[$. On pose :

$$A = (ab-1)(bc-1)(ac-1)$$

1) Vérifier que : $\frac{A}{abc} = \left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right)$

2) Montrer que : $A < 0$.

3) Dédurre que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc \leq a + b + c + \frac{1}{abc}$

Exercice 4:

1- Soient $a ; b$ et c des nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

2 - Soient a et b deux nombres réels strictement positifs

Montrer que : $\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{a^2+b^4} \leq \frac{1}{ab}$

3 - Soient $a ; b$ et c des nombres réels strictement positifs

Montrer que : $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

4 - soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que : $a^2 + b^2 + 1 > a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$

Exercice 5 :

Soient $a ; b$ et c des nombres réels tels que : $a + b + c = 0$.

On pose : $A = ab + bc + ca$ et $B = abc$

1) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 = -2A$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a : $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + Ax - B$

b) En déduire que : $a^3 = -aA + B$; $a^4 = -a^2A + aB$ et $a^5 = aA^2 + a^2B - AB$.

3) a) Montre que : $a^3 + b^3 + c^3 = 3B$; $a^4 + b^4 + c^4 = 2A^2$ et $a^5 + b^5 + c^5 = -5AB$.

b) En déduire que : $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \times \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$.

Exercice 6:

Soient $a ; b$ et c des réels tels que : $(\forall x \in [-1;1]) ; |ax^2 + bx + c| \leq 1$

1 - Ecrire la négation de : $(\forall x \in [-1;1]) ; |ax^2 + bx + c| \leq 1$

2- Montrer que : $|c| \leq 1$ et $-1 \leq a + c \leq 1$

3- En Déduire que : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Exercice 7: Raisonnement par disjonction des cas

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{2x^2 - 3x + 3} - x + 1 > 0$

2) Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{2x^2 - 3x + 3} = 2x - 1$