Examen national 2015

session normale 2éme Bac SM

Exercice 1 : (3points)

1- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $(E): z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

0.25 a) Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0.50 b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b\in IR$)

0.25 c) Vérifier que: $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2 - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0.5 a) Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0.5 c) Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

0.5 d) Soit C un point, d'affixe c appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A.

Déterminer un argument du nombre complexe $\left(\frac{c}{c-a}\right)$

Exercice 2: (3points)

Soit x un nombre entier relatif tel que: $x^{1439}\equiv 1436\ [2015]$

0.25 1- Sachant que: $1436\times1051-2015\times749=1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2- Soit d un diviseur commun de x et de 2015.

0.5 a) Montrer que d divise 1436

0.5 b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0.75 3- a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $x^{1440}\equiv1[5]$, $x^{1440}\equiv1[13]$ et $x^{1440}\equiv1[31]$ (Remarquer que: $2015=5\times13\times31$)

0.5 b) Montrer que : $x^{1440}\equiv1[65]$ et en déduire que : $x^{1440}\equiv1[2015]$

0.5 4- Montrer que : $x\equiv1051[2015]$

Exercice 3 : (4 points)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_2(IR),+,\times\right)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(IR;+)$ est un groupe commutatif.

Pour tout nombre réel x, on pose $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in IR\}$.

On munit E de la loi de composition interne T définie par:

$(\forall (x,y)\in IR^2)$; $M(x)\text{T}M(y)=M(x+y+1)$

1- Soit φ l'application de IR dans E définie par : $(\forall x\in IR)$ $\varphi(x)=M(x-1)$

0.5 *a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(IR;+)$ vers (E,T).*

0.5 *b) Montrer que (E,T) est un groupe commutatif.*

0.5 *2- a) Montrer que:* $(\forall (x,y)\in IR^2)$

$M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$

0.5 *b) En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\boldsymbol{IR}),\times)$ et que la loi «×» est commutative dans E.*

0.5 *c) Montrer que la loi «×» est distributive par rapport à la loi « T» dans E.*

0.5 *d) Vérifier que: $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que I est l'élément neutre dans $(\mathrm{E},\times)$.*

0.25 *3- a) Vérifier que :* $(\forall x\in IR-\{-1\})$; $M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$

0.75 *b) Montrer que $(\mathrm{E},\mathrm{T},\times)$ est un corps commutatif.*

<u>Exercice 4:</u> *(6.5points)*

<u>1ère partie</u>:

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et

$f(x)=x(1+\ln^2 x)$ *pour* $x>0$.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.50 *1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0.25 *2- a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.*

0.50 *b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0.50 *c) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ en déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.*

0.25 *3- a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.*

0.25 *b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation: $y=x$*

0.50 *c) Tracer la courbe (C). (On prendra : $e^{-1}=0,4$)*

<u>2ème partie</u>:

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $u_0=e^{-1}$ et $(\forall n\in IN)$; $u_{n+1}=f(u_n)$

0.5 *1- Montrer par récurrence que:* $(\forall n\in IN)$; $e^{-1}\leq u_n<1$

0.5 *2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante puis déduire qu'elle est Convergente.*

3- On pose: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

0.25 a) Montrer que: $e^{-1} \leq l \leq 1$

0.50 b) Déterminer la valeur de l

Troisième partie:

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

0.25 1- a) Montrer que la fonction H : $x \mapsto \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction h : $x \mapsto x\ln x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

0.50 b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$

0.50 c) En déduire que : $F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0.25 2- a) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$,

0.50 b) Calculer $\lim_{x\to0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$

EXERCICE5:(3.5points)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par:

$g(0)=\ln 2$ et $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ pour $x>0$

0.50 1- a) Montrer que: $(\forall x>0)\left(\forall t\in[x;2x]\right)$ $e^{-2x}\leq e^{-t}\leq e^{-x}$

0.50 b) Montrer que: $(\forall x>0)$; $e^{-2x}\ln2\leq g(x)\leq e^{-x}\ln2$

0.25 c) En déduire que la fonction g est continue à droite en 0.

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.50 3- a) Montrer que : $(\forall t>0)$; $-1\leq\frac{e^{-t}-1}{t}\leq e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.50 b) Montrer que: $(\forall x>0)$; $-1\leq\frac{g(x)-\ln2}{x}\leq\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

0.50 c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0.