

Exercice 1

Simplifier les nombres suivants :

$$A = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}}} ; B = \sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2}-7} + 5\sqrt{3-2\sqrt{2}}} ; C = \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}}$$

Exercice 2

Soient a ; b et c trois réels strictement positifs

1) Montrer que : $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)$.

2) Montrer que : $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

3) Montrer que : $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$

Exercice 3

Calculer les nombres suivants :

1) $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

2) $B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{625}\right)$

Exercice 4

1) Montrer que : $x + x(1+x) + x(1+x)^2 + x(1+x)^3 + \dots + x(1+x)^{99} = (1+x)^{100} - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

2) Montrer que : $(2^1+1) \times (2^2+1) \times (2^4+1) \times \dots \times (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$