Exercice 1 - *Loi de Morgan*

Soit A, B et C trois propositions. Démontrer que les propositions $(A et (B ou C))$ *et* $((A et B) ou (A et C))$ *sont équivalentes.*

Corrigé

On va dresser les tables de vérité de ces deux propositions et démontrer que leurs résultats sont identiques.

A	B	C	B OU C	A ET (B OU C)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

A	B	C	A ET B	A ET C	(A ET B) OU (A ET C)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

La lecture de ces deux tables de vérité nous dit bien que les deux propositions sont équivalentes.

Exercice 2 - *Négation de l'implication*

Soit P et Q deux propositions. Montrer que les propositions $\neg(P \Rightarrow Q)$ *et* P *et* $\neg Q$ *sont équivalentes.*

Corrigé

Il suffit d'établir les tables de vérité de ces deux propositions et de vérifier qu'elles sont identiques. On a d'une part

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	NON $P \Longrightarrow Q$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

et d'autre part

P	Q	NON Q	P ET NON Q
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Les deux propositions sont bien équivalentes!

Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Exercice 3 - *Nécessaire ou suffisante?*

On rappelle qu'un entier p divise n, et on note $p \mid n$, *s'il existe un entier relatif k tel que* $n = k \times p$.

Est-ce que $6 \mid n$ *est une condition nécessaire à ce que n soit pair?*

Est-ce que $6 \mid n$ *est une condition suffisante à ce que n soit pair?*

Corrigé

Notons A la proposition "$6 | n$" et B la proposition "n est pair". Alors A⟹B. En effet, si $6 | n$, alors il existe un entier k tels que $n = 6 \times k$ et donc $n = 2 \times (3k)$ est pair. En revanche, la réciproque est fausse.
En effet, 4 est pair mais 6 ne divise pas 4. On en déduit que
$6 | n$ n'est pas une condition nécessaire à ce que n soit pair (4 est un contre-exemple).
$6 | n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair.

Exercice 4 - *Trouver des conditions nécessaires*

Trouver des conditions nécessaires (pas forcément suffisantes) à chacune des propositions suivantes :
Avoir son bac.
- *Le point A appartient au segment $[BC]$.*
- *Le quadrilatère ABCD est un rectangle.*

Corrigé

Avoir passé l'examen.
Les points A,B et C sont alignés.
ABCD est un parallélogramme.
Les trois conditions précédentes sont des conditions nécessaires mais non suffisantes (pourquoi?). On peut en imaginer bien d'autres...

Exercice 5 - *Beaucoup de bruit pour rien*

- *Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :*
- *Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.*
- *Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.*
- *Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.*
- *Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.*
- *Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.*
- *Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.*
- *Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.*
- *Travail régulier implique réussite à l'examen.*
- *On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement*

Corrigé

Notons P la proposition "Avoir son examen" et Q la proposition "Travailler régulièrement". Nous allons écrire les propositions sous la forme $P \Rightarrow Q$ ou Q⟹P.
1- *La proposition est clairement Q⟹P.*
2- *La proposition est $P \Rightarrow Q$.*
3- *La proposition est $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$. C'est une proposition équivalente à sa contraposée, $P \Rightarrow Q$.*
4- *Même signification que 2. $P \Rightarrow Q$.*
5- *Cette fois, on a Q⟹P.*
6- *La proposition est $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$, qui est équivalente à $P \Rightarrow Q$.*
7- *Cette fois, on a $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$, qui est équivalente à Q⟹P.*
8- *Tout simplement, Q⟹P.*
9- *C'est la même chose que 2, à savoir $P \Rightarrow Q$*
Les propositions 1, 5, 7 et 8 sont donc équivalentes, et les propositions 2, 3, 4, 6 et 9 le sont également.

Exercice 6 *- Vraies ou fausses*

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :
136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.

- $\exists x \in \mathbb{R} ; (x+1=0 \ et \ x+2=0)$.
- $(\exists x \in \mathbb{R} ; x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} ; x+2=0)$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (x+1 \neq 0 \ ou \ x+2 \neq 0)$.
- $\exists x \in \mathbb{R}^* , \forall y \in \mathbb{R}^* , \forall z \in \mathbb{R}^* \ / z - xy = 0$;
- $\forall y \in \mathbb{R}^* , \exists x \in \mathbb{R}^* , \forall z \in \mathbb{R}^* \ / z - xy = 0$;
- $\forall y \in \mathbb{R}^* , \forall z \in \mathbb{R}^* , \exists x \in \mathbb{R}^* \ / z - xy = 0$;
- $\exists a \in \mathbb{R} , \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R} ; |a| < \varepsilon$;

Corrigé

- *Cette propositions est fausse, car 2 ne divise pas 167.*
- *Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.*
- *Cette proposition est fausse, car x devrait être simultanément égal à -1 et à -2.*
- *Cette proposition est vraie car* $(\exists x \in \mathbb{R} ; x+1=0)$ *est vraie (il suffit de prendre* $x=-1$ *) et de la même façon* $(\exists x \in \mathbb{R} ; x+2=0)$ *est vraie (il suffit de prendre* $x=-2$ *).*
- *Cette proposition est vraie, par exemple car il s'agit de la négation de la proposition 3, qui est fausse.*
- *Cette assertion est fausse. Si on considère x n'importe quel réel non nul, alors le choix de* $y=1$ *et de* $z=2x$ *fait que z est différent de xy.*
- *Cette assertion est fausse. Prenons n'importe quel y dans* $\mathbb{R}^*$. *On voudrait trouver x dans* $\mathbb{R}^*$ *tel que, pour tout z dans* $\mathbb{R}^*$, *on ait* $z = xy$. *Bien sûr, ce n'est pas possible, car le x que l'on choisit devrait convenir à toute valeur de z, ce qui n'est pas possible car il suffit de considérer un z différent de xy.*
- *Cette assertion est vraie, car on peut choisir x une fois y et z fixés. On choisit alors* $x = \frac{z}{y}$.
- *L'assertion est vraie, il suffit de prendre* $a=0$ *(convient pour toute valeur de* $\varepsilon > 0$ *).*
- *Cette assertion est "évidemment" vraie car elle est plus faible que la précédente (on peut choisir a après* $\varepsilon > 0$*).*

Exercice 7 ***- Nier des assertions avec quantificateurs***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Nier les assertions suivantes :*

- $\forall x \in \mathbb{R} , f(x) \neq 0$.
- $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
- $\forall x \in \mathbb{R} , f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

Corrigé

- $\exists x \in \mathbb{R} , f(x) = 0$.
- $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M$.
- $\exists x \in \mathbb{R} , f(x) > 0 \ et \ x > 0$.
- $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in I^2, |x-y| \leq \eta \ et \ |f(x) - f(y)| > \varepsilon$.