Questions indépendantes

1- *Montrer que:* $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=1$

2- *En utilisant une intégration par parties, montrer que:* $\int_1^e x^2\ln(x)\ dx=\dfrac{2e^3+1}{9}$

3- *Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :* $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

4- *En utilisant une intégration par parties, montrer que :*

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\times\ln(1+\cos x)\ dx=\dfrac{\pi}{2}-1$

5) *On pose:* $W_n=n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$. *Calculer en fonction de n la somme :*

$S_n=W_1+W_2+\ ...\ +\ W_N$

6- *On considère dans le plan complexes les deux points A et B d'affixes respectives:* $a=3i$ *et* $b=2+i$. *Déterminer puis construire* (D) *ensemble des points M d'affixe z tel que :*

$|z-3i|=|\overline{z}-2+i|$

7- *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x-2\sqrt{x}+2\right)$ *; puis montrer que :* $\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(e^x-2\sqrt{x}+2\right)=\ln 4$

8- *Soit x un réel*

a) *Linéariser* $\sin^4(x)$

b) *Déterminer les primitives de la fonction :* $x\mapsto\sin^4(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

c) *Calculer l'intégral :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(x)dx$

Exercice 1 Suites numériques

On considère la suite numérique (U_n) *définie par : et pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$; $\begin{cases}U_1=\ln(2)\\ U_{n+1}=\ln\left(2-e^{-U_n}\right)\end{cases}$

1- a) *Vérifier que:* $U_2=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ *et* $U_3=\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

b) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $U_n>0$

c) *Vérifier que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $e^{U_n}>2-e^{-U_n}$ *; puis montrer que la suite* (U_n) *est décroissante*

d) *Déduire de ce qui précède que la suite* (U_n) *est convergente.*

2- a) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $U_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

b) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 2 Nombres complexes

1) On considère dans C l'équation $(E):\ z^2-\left(\sqrt{3}-1\right)z+2=0$

a) Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta=-\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) En déduire les solutions de l'équation (E)

2) Soient les nombres complexes : $a=1-i\ ;\ b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$ et $c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

a) Montrer que : $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) En déduire que : $c=\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.

c Vérifier que: $b=i\times\overline{c}$, puis en déduire une forme exponentielle de b.

3- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a; b et c.

Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M'image de M' par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que: $z'=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Déterminer l'image du point A par la rotation R

c) Vérifier que: $a+b=c$; puis en déduire que le triangle ABC est isocèle en C

d) Déterminer la nature du quadrilatère OACB

Exercice 3 Nombres complexes

On considère le nombre complexe suivant : $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1- Montrer que : $a^2=-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

2- Écrire a^2 sous forme trigonométrique 3π.

3- En déduire que : $|a|=2$ et $\arg(a)\equiv\dfrac{3\pi}{8}[2\pi]$

4- En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$

Problème Étude d'une fonction numérique

Première Partie

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln(x)$

1- Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

2- Montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

3- Calculer $g(1)$ puis déduire de ce qui précède que $g(x)\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Deuxième Partie

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x}\ln(x) & si\ x \in]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C_f) *est la courbe de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

2- a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -+\infty$

b) Interpréter les résultats de a) géométriquement

3- a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 *; puis interpréter le résultat géométriquement*

b) g(x)

4- a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

b) Vérifier que: $f'(1) = 0$ *puis interpréter le résultat géométriquement*

c) Dresser le tableau de variations de f

5- Soit (Δ) *la droite d'équation* $y = x$.

Montrer que (C_f) *est au-dessus de* (Δ) *sur* $]0;1[$ *et que* (C_f) *est au-dessous de* (Δ) *sur* $]1;+\infty[$

6- Tracer (Δ) *et* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

Troisième Partie

1- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer*

2- a) Calculer : $f(e)$, *puis montrer que* f^{-1} *est dérivable en* $e - \sqrt{e}$.

b) Calculer : $\left(f^{-1}\right)'\left(e - \sqrt{e}\right)$

3- Donner le tableau de variations de f^{-1}

4- Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la courbe de* f^{-1}.

5- Expliquer géométriquement pourquoi la fonction f^{-1} *n'est pas dérivable en* 1.

Quatrième Partie

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $h(x) = f(|x|)$

1- Montrer que h est une fonction paire

2- Vérifier que : $h(x) = f(x)$ *pour tout x de* $[0;+\infty[$

3- Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la courbe de h.*