Exercice 1 *(14 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x)=x+1-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2} \;;\; x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\arctan(x)}{x} \;;\; x<0 \end{cases}$

(C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) *Montrer que f est continue en* 0.

2) *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) *En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :* $(\forall x\in]-\infty;0])$;

$$x<\text{Arctan}(x)<\frac{x}{1+x^2}$$

4) *Etudier la dérivabilité de f en* 0 *et interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

5) a) *Montrer que :* $(\forall x\in]-\infty;0])$; $f'(x)=\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) *Montrer que f est croissante sur* $]-\infty;0]$ *;puis dresser son tableau de variations sur* $\mathbb{R}$

6) *Déterminer les branches infinies de* (C_f) *; puis construire* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) *Soit g la restriction de la fonction f sur* $[1;+\infty[$.

a) *Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.*

b) *Calculer* $g(8)$ *; puis montrer que* g^{-1} *la fonction réciproque de g est dérivable en* 3 *et calculer* $(g^{-1})'(3)$

8) *On considère la fonction h définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $h(x)=\dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{2}{3}-f\left(\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{x^2}{9}A$ **;** *A est un réel tel que :* $h(1)=0$

a) *En utilisant le théorème de Rolle montrer que :* $(\exists c\in]0,1[)\setminus f'(c)-f'\left(\dfrac{c}{3}\right)=\dfrac{2}{3}cA$

b) *En utilisant le théorème des accroissements finis déduire que :* $(\exists b\in]0,1[)\setminus f''(b)=A$

Exercice 2 *(6 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\arctan(1+x)$

1) *Montrer que l'équation* $f(x)=x$ *admet une unique solution* α *dans* $\mathbb{R}$ *et que :* $1<\alpha<2$

2) *Montrer que* **:** $(\forall x\in[1;2]);|f'(x)|\leq\dfrac{1}{5}$

3) *Soit* (u_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$;puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|u_n - \alpha|$

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.