

EXERCICE 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

- 1) a) Montrer que : $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 b) Montrez que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante
 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente
- 2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1} = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1
 b) Montrer que $v_n = 4 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et exprimer u_n en fonction de n .
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 2

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

A, B et C trois points d'affixes respectifs $a = 1 - i$, $b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ et $c = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

- 1) a) déterminer la forme trigonométrique de a
 b) Montrer que $\frac{c}{a} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis déduire.
- 2) a) Montrer que $c = b - a$
 b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$
- 3) Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et de rapport 2
 Déterminer g l'affixe du point G image de A par l'homothétie h
- 4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 1 + i| = |z - 1 - 2i|$

EXERCICE 3

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges ; 4 boules vertes et deux blanches
 On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne

- 1) On considère les deux événements suivants
 A : « tirer une boule blanche en premier »
 B : « Tirer deux boules de même couleur »

a) Montrer que : $P(A) = \frac{2}{9}$

b) Calculer la probabilité de B, puis en déduire que $P(\overline{B}) = \frac{13}{18}$ ($\overline{B}$ est l'évènement contraire de B)

- 2) Sachant que la première boule tirée est blanche, calculer la probabilité pour tirer deux boules de couleurs différentes.
- 3) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées
 a) Montrer que les valeurs prises par X est $\{0; 1; 2\}$
 b) Déterminer la loi de probabilité de X

EXERCICE 4

On pose : $I = \int_0^{4\ln 2} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{4\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx$

1) a) Montrer que : $I + J = 4\ln 2$ et $I - 3J = 2\ln 2$

b) En déduire la valeur de I et J

2) En utilisant une intégration par parties calculer l'intégrale : $K = \int_0^{4\ln 2} e^{-x} \ln(e^x + 4) dx$

PROBLEME

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1 cm)

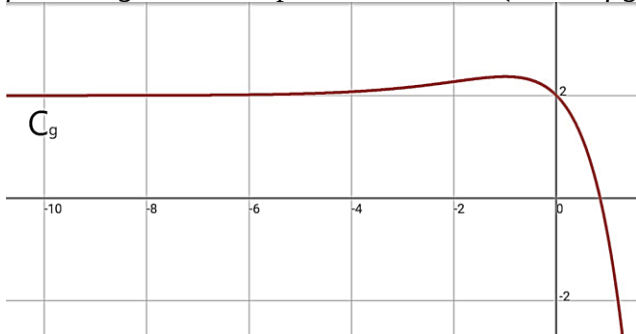
1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

c) Déterminer l'intersection de la courbe (C_f) avec la droite (Δ) et montrer que (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) sur $]-\infty; -1[$ et en dessous de la droite (Δ) sur $]-1; +\infty[$

II. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - xe^x$; Et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (voir la figure ci-dessous)



1) a) On donne le tableau suivant:

x	0,7	0,8	0,9	1
$g(x)$	0,6	0,2	-0,2	-0,7

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α tel que $0,8 < \alpha < 0,9$

b) Déterminer à partir de (C_g) le signe de $g(x)$

2) Montrer que : $f(\alpha) = \alpha$

a) Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

3) Montrer que $f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x + 2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$; en déduire que $f(x) - x \geq 0$ pour tout x de $[0; \alpha]$

4) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $e^x + 2x + 4 = 0$

6) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur $]-\infty; \alpha]$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(h^{-1})'(0)$

c) Tracer la courbe de la fonction h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que : $0 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.