Examen National 2019 session normale
Sujet de Maths   Section PC-SVT

Exercice1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *; on considère les points* $A(1;-1;-1)$; $B(0;-2;1)$ *et* $C(1;-2;0)$

0.75 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

0.5 b) En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$.

0.75 Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2;-1;1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$.

0.5 3) a) Calculer $d\left(\Omega;(ABC)\right)$ la distance du point Ω au plan (ABC).

0.5 b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de n'est pas demandée)

Exercice 2:(3 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$; $b=2+2i$; $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$.

0.5 a) Vérifier que : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

0.25 b) En déduire que les points A ; C et D sont alignés.

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$.

0.5 Vérifier que : $z'=\dfrac{1}{2}az$

4) Soient H l'image du point B par la rotation R son affixe h et P le point d'affixe p tel que : $p=a-c$

0.5 a) Vérifier que : $h=ip$.

0.5 b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3:(3 points)

Une urne contient dix boules trois boules vertes ; six boules rouges et une boule noire.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
On considère les événements suivants :
A: « Obtenir trois boules vertes.»
B:«Obtenir trois boules de même couleur »
C: «Obtenir au moins deux boules de même couleur »

2 1) Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{120}$ et $p(B)=\dfrac{7}{40}$

1 2) Calculer $p(C)$.

Problème: *(11 points)*

Première partie:

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité:1 cm)*

0.5 1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

0.25 2) a) *Vérifier que pour tout x de* $]0;+\infty[$ *;* $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0.5 b) *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.5 c) *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ *puis en déduire que :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

0.75 d) *Montrer que* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation :* $y=x$.

0.5 3) a) *Montrer que pour tout de* $]0;1]:(x-1)+\ln x\leq 0$.

et que pour tout x de $[1;+\infty[\ :(x-1)+\ln x\geq 0$.

1 b) *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$ *;* $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$.

0.5 c) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

0.5 4) a) *Montrer que :* $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ *; pour tout x de* $]0;+\infty[$.

0.5 b) *En déduire que* (C) *admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*

0.5 5) a) *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$ *;* $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ *et déduire la position relative de* (C) *et* (Δ).

1 b) *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le même repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 6) a) *Montrer que la fonction* $H:x\mapsto x\ln x-x$ *est une primitive de la fonction* $h:x\mapsto\ln x$.

0.5 b) *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$.

0.5 c) *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine du plan limité par* (C) *et* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.

Deuxième partie:

Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *; pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

0.5 1) a)*Montrer par récurrence que :* $1\leq u_n\leq e$ *; pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

0.5 b) *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

0.5 c) *En déduire que la suite est convergente*

0.75 2) *Calculer la limite de la suite* (u_n).