Fiche Astuces et Méthodes

I- GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

2. Comment montrer qu'une fonction f est paire ?

3. Comment montrer qu'une fonction f est impaire ?

4. Comment étudier la parité d'une fonction f ?

5. Comment montrer qu'une fonction f est périodique de période p ?

6. Comment interpréter graphiquement la parité d'une fonction f ?

7. Comment interpréter graphiquement la périodicité d'une fonction f ?

8. Comment montrer qu'un point $A(a;b)$ *est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f ?*

9. Comment montrer qu'une droite d'équation x=a est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f

10. Comment interpréter l'égalité $f(x)+f(-x)=c$ *où c est une constante réelle ?*

11. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de (C_f) *et* (C_g) *?*

12. Comment déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection de (C_f) *et de l'axe des abscisses ?*

13. Comment déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) *et de l'axe des ordonnées ?*

GENÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

Méthode 1

Si l'expression de la fonction contient des quotients, on écrit qu'elle est définie si, et seulement si, le ou les dénominateurs sont différents de 0. La résolution du ou des équations ainsi obtenues conduit à D

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition D, de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x}{7-5x} - \frac{4}{x-6}$

Solution

Soit $x \in IR$ $f(x)$ *est définie si, et seulement si,* $7-5x \neq 0$ *et* $x-6 \neq 0$ *; soit* $x \neq \frac{7}{5}$ *et* $x \neq 6$

On a donc $D = IR - \left\{\frac{7}{5}; 6\right\}$

Remarque :
L'ensemble de définition est appelé aussi domaine de définition

Méthode 2

Si expression de la fonction contient des racines carrées on ecrit quelle est definie si, et seulement si, la ou les expressions sous les racines sont positives ou nulles la résolution du ou des inéquations ainsi obtenues donne le domaine de définition .

Exemple

Determiner l'ensemble de definition D, de la fonction $g : x \rightarrow \sqrt{8-3x} - \sqrt{4+5x}$

Solution

Soit $x \in IR$ *;* $g(x)$ *est définie si, et seulement si* $8-3x \geq 0$ *et* $4+5x \geq 0$ *; Soit* $x \leq \frac{8}{3}$ *et* $x \geq \frac{-4}{5}$

On a donc $D = \left[\frac{-4}{5}; \frac{8}{3}\right]$.

Méthode 3

Si l'expression de la fonction contient des $\ln$ *(ronction logarithme), on écrit qu'elle est definie si, et seulement si, les quantites auxquelles applique* $\ln$ *sont strictement positives. La résolution du ou des équations ainsi obtenues donne le domaine de définition.*

Exemple 1

Quel est l'ensemble de définition D de la fonction $h : x \mapsto \ln(1-x)$

Solution

La fonction h est définie si, et seulement si, $1-x > 0$ *soit* $x < 1$.

Ainsi, $D =]-\infty;1[$

Exemple 2

Etudier le domaine de définition D, de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{9x-1}}$

Solution

F est définie si, et seulement si, $x+2>0$, $9x-1\geq 0$ et $9x-1\neq 0$; c'est-à- dire, $x>-2$ et $x>\frac{1}{9}$

On conclut que $D = \left]\frac{1}{9};+\infty\right[$

2. Comment montrer qu'une fonction f est paire

Méthode

On écrit que pour tout $x\in D$, $-x\in D$
On montre que $f(-x) = f(x)$ en calculant $f(-x)$.
On conclut alors que f est paire

Exemple

Soit $f(x) = 3-\frac{1}{x^2}$ definie sur IR^*. Montrer que f est paire

Solution

Pour tout $x\in IR^*$ on a : $-x\in IR^*$.

$f(-x) = 3-\frac{1}{(-x)^2} = 3-\frac{1}{x^2} = f(x)$

On conclut que f est paire.

3. Comment montrer qu'une fonction f est impaire

Méthode

On écrit que pour tout $x\in D$, $-x\in D$
On montre que $f(-x) = -f(x)$ en calculant $f(-x)$.
On conclut alors que f est impaire

Exemple

Montrer que la fonction g definie par $g(x) = 2x^3 - xe^{x^2}$ est impaire .

Solution

Pour tout $x\in IR$, on a : $-x\in IR$

D'autre part, $g(-x) = 2(-x)^3 - (-x)e^{(-x)^2} = -\left(2x^3 - xe^{x^2}\right) = -g(x)$

La fonction g est donc impaire

4. Comment étudier la paritè d'une fonction

Méthode

On vérifie que pour tout $x \in D$, $-x \in D$

On calcule $f(-x)$

■ Si $f(-x) = f(x)$ on conclut que f est paire

■ Si $f(-x) = -f(x)$ on conclut que f est impaire

■ Si $f(-x)$ et differente des deux resultats précèdents alors f n'est ni paire ni impaire.

Exemple

Soit $h(x) = \ln\left(\frac{x+5}{x-5}\right)$. Erudier la parité de h sur $I =]-5;5[$.

Solution

Pour tout $x \in I$, $x \in I$ (Car $-5 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -(-5) \Rightarrow -5 < -x < 5$)

Calculous $f(-x)$

$$h(-x) = \ln\left(\frac{-x+5}{-x-5}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{-}(x-5)}{\cancel{-}(x+5)}\right) = -\ln\left(\frac{x+5}{x-5}\right) = -h(x)$$

On peut conclure que f est impaire

5 **Comment interpréter graphiquement la parité d'une fonction** f ?

Méthode 1

Si la fonctionfest paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f. On peut donc restreindre l'étude de f à la partie positive (ou négative) de son domaine de définition.

Ainsi, si est paire IR, on étudie f sur limaralle $[0;+\infty[$. C_f la courbe compléte de f s'obtient par la symétie d'axe (Oy) .

Méthode 2

Si la fonction f est impaire, alors l'origine du repère O est un centre de symétrie de la courbe représentativé de f.

Exemple

Soit $x \in IR$ $f(x) = -5\cos^2\left(\frac{x}{5}\right) - 1$

a)Etudier la parité de la fonction f.

b)Montrer que f est 10π -periodique

c)En déduire qu'il suffit d'étudier f sur intervale $[0;5\pi]$.

Solution

a) Pour $x \in IR$,ona $-x \in IR$ et $f(-x) = -5\cos^2\left(-\frac{x}{5}\right) - 1 = -5\cos^2\left(\frac{x}{5}\right) - 1 = f(x)$

D'où $f(-x) = f(x)$ *sur IR*

La fonction f est donc paire

b) Pour $x \in IR$ *, ona* $(x - 10\pi) \in IR$ *et*

$$f(x+10\pi) = -5\cos^2\left(\frac{x+10\pi}{5}\right) - 1 = -5\cos^2\left(\frac{x}{5} + 2\pi\right) - 1 = -5\cos^2\left(\frac{x}{5}\right) - 1 = f(x)$$

La fonction f est donc 10π*-périodique*

c) La parité de la fonction f permet de restreindre son étude à l'intervalle $[0;+\infty[$.

alors que sa 10π*-peniodicité autorise à ne l'étudier que sur unintervalle de longueur* 10π *;*

choisissons $[-5\pi;5\pi]$.

La prise en compte simultanée de la parité et de la periodicité conduit finalement à étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;5\pi]$.

6. Comment montrer qu'un point A(a; b) est centre de symetric de la courbe representative dune fonction f ?

Méthode 1

¬ *On considere un réel h tel que* $(a+h) \in D_f$ *, et* $(a-h) \in D_f$

¬ *On montre que* $\dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$ *en calculant* $\dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$

On conclut alors que le point A(a; b) est un centre de symétrie pour (C_f).

Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -x^3 + 3x^2$ *. Démontrer que le pomt A(1 ;2) est un centre de symètric de* (C_f) *la courbe représentative de f.*

Solution

Soit $h \in IR$ *tel que* $(1-h)$ *et* $(1+h)$ *appartiennent à* D_f.

Calculons $\dfrac{f(1+h) + f(1-h)}{2}$

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = \frac{\left(-(1+h)^3 + 3(1+h)^2\right) + \left(-(1-h)^3 + 3(1-h)^2\right)}{2}$$

$$= \frac{(1+h)^2(-1-h+3) + (1-h)^2(-1+h+3)}{2}$$

$$= \frac{(2-h)(1+h)^2 + (2+h)(1-h)^2}{2}$$

$$= \frac{(2-h)(1+h^2) + 2h\times(2-h) + (2+h)(1+h^2) - 2h\times(2+h)}{2}$$

$$= \frac{(2-\cancel{h}+2+\cancel{h})(1+h^2) + 2h\times(\cancel{2}-h-\cancel{2}-h)}{2}$$

$$= \frac{4+\cancel{4h^2}-\cancel{4h^2}}{2} = 2$$

Apres développement, on trouve 2 qui est l'ordonnée de A.

On peut donc conclure que A(1:2) est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

Méthode 2 (rapide)

On considere un réel x tel que $\left(2a-x\right)\in D_f$

On montre que $\dfrac{f\left(x\right)+f\left(2a-x\right)}{2}=b$ (on a posé $a+h=x$ de la méthode 1)

On conclut alors que le point A(a; b) est un centre de symétrie pour $\left(C_f\right)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par : $f\left(x\right)=-x^3+3x^2$ *. Démontrer que le pomt A(1 ;2) est un centre de symètric de* $\left(C_f\right)$ *la courbe représentative de f.*

Solution

Soit $x\in IR$ *tel que* $\left(2-x\right)$ *appartiennent à* D_f.

Calculons $\dfrac{f\left(x\right)+f\left(2-x\right)}{2}$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{f\left(x\right)+f\left(2-x\right)}{2}&=\frac{-x^3+3x^2-\left(2-x\right)^3+\left(2-x\right)^2}{2}\\&=\frac{-x^3+3x^2+\left(-\left(2-x\right)^3+3\left(2-x\right)^2\right)}{2}\\&=\frac{-x^3+3x^2+\left(2-x\right)^2\left(-2+x+3\right)}{2}\\&=\frac{-x^3+3x^2+\left(4-4x+x^2\right)\left(1+x\right)}{2}\\&=\frac{-\cancel{x^3}+\cancel{3x^2}+4-\cancel{4x}+\cancel{x^2}+\cancel{4x}-\cancel{4x^2}+\cancel{x^3}}{2}=2\end{aligned}$$

Après développement, on trouve $\dfrac{f\left(x\right)+f\left(2-x\right)}{2}=2$ *qui est l'ordonnée de A.*

On conclut donc que A(1 ;2) est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

6. ***Comment montrer qu'une droite d'équation x= a est un axe de symetric de la courbe representative dune fonction f ?***

Méthode 1

On prend $h\in IR$ tel que $\left(a-h\right)\in D_f$ et $\left(a+h\right)\in D_f$

On montre que : $f\left(a+h\right)=f\left(a-h\right)$ en calculant separément : $f\left(a+h\right)$ et $f\left(a-h\right)$

On conclut **: droite d'équation x = a est un axe de symetric de la courbe**

Exemple

Soit g une fonction définie sur $IR-\left\{0;4\right\}$ *par :* $g\left(x\right)=\dfrac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}$

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symetric de la courbe de g .

Solution

Soit $h \geq 0$ tel que $(2-h) \in D_f$ et $(2+h) \in D_f$,(ici $a=2$)

Calculons : $g(2-h)$ et $g(2+h)$

■ $g(2-h) = \dfrac{3(2-h)^2 - 12(2-h)+1}{(2-h)^2 - 4(2-h)}$

$= \dfrac{3(4-4h+h^2)-24+12h+1}{4-\cancel{4h}+h^2-8+\cancel{4h}}$

$= \dfrac{12-\cancel{12h}+3h^2-24+\cancel{12h}+1}{h^2-4}$

$= \dfrac{3h^2-11}{h^2-4}$

■ $g(2+h) = \dfrac{3(2+h)^2 - 12(2+h)+1}{(2+h)^2 - 4(2+h)}$

$= \dfrac{3(4+4h+h^2)-24-12h+1}{4+\cancel{4h}+h^2-8-\cancel{4h}}$

$= \dfrac{12+\cancel{12h}+3h^2-24-\cancel{12h}+1}{h^2-4}$

$= \dfrac{3h^2-11}{h^2-4}$

On constate qte : $g(2-h) = g(2+h)$

La droite equation x=2 est donc axe de symetrie de C_f .

Méthode 2

On montre que $f(2a-x) = f(x)$ (Ici on a posé $a+h=x$ dans l'équation précèdente)

On conclut **: droite d'équation x = a est un axe de symetric de la courbe**

Exemple (on prends l'exemple précèdent)

Solution

Soit $x \in D_f$, tel que $(4-x) \in D_f$.

Montrons que $g(2a-x) = g(x)$ avec $a=2$

Ona : $g(2a-x) = g(4-x) = \dfrac{3(4-x)^2 - 12(4-x)+1}{(4-x)^2 - 4(4-x)}$

$$= \frac{3\left(16-8x+x^2\right)-48+12x+1}{\cancel{16}-8x+x^2-\cancel{16}+4x}$$

$$= \frac{\cancel{48}-24x+3x^2-\cancel{48}+12x+1}{x^2-4x}$$

$$= \frac{3x^2-12x+1}{x^2-4x}$$

$$= g(x)$$

On peut conclure que la droite equation $a=2$ *est axe de symétrie de* C_f .

7. <u>***Comment interpreter l'égalité***</u> $f(x)+f(-x)=c$ <u>***?***</u>

<u>**Méthode**</u>

Il suffit de voir que $f(x)+f(-x)=c$ *s'écrit aussi* $\frac{f(0+x)+f(0-x)}{2}=c$

Ce qui signifie que le point $A(0;c)$ *est centre de symetric de* C_f .

8. <u>***Commentdéterminer les coordonnées du ou des points intersection de deux courbes de deux fonction f et g sur un intervalle .***</u>

<u>**Méthode**</u>

On résoud l'équation $f(x)=g(x)$ *pour trouver la ou les abscises* x_0 *des points d intersecton.*

On calcule $f(x_0)$ *pour trouver la ou les ordonnées de ces points d'intersection.*

On conclut que les points de coordonnees $(x_0; f(x_o))$ *sont les points cherchés.*

9. <u>***Comment determiner les coordonneesdu ou des points intersection de C_f et de l'axe des abscises***</u>

<u>**Méthode**</u>

¬ *Le ou les points d intersection ont pour ordonmie* 0 .

¬ *On résoud l'équation* $f(x)=0$ *pour trouver la ou les abscises* x_0 *(solutions de l'équation) des points d intersection.*

¬ *Les points de coordonneessont* $(x_0;0)$ *les points cherchés.*

<u>***Exemple***</u>

Soit la fonction define sur IR par : $f(x)=-6x^2+x+5$

Determiner le ou les points intersection de C la courbe représentative de f et de l'axe des abscises

<u>***soluton***</u>

Résolvons l'équation $f(x)=0$ *pour déterminer les abscises des points d'intersection*

Ona : $f(x)=0 \Leftrightarrow -6x^2+x+5=0$

Après calcul du disciminant de cette équation du second dégre on obtient deux solutions : $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -\frac{5}{6}$

Les points chérchés sont donc $(1;0)$ *et* $\left(-\frac{5}{6};0\right)$

10. Comment déterminer les coordonnées du point d' intersection de C et de l'axe des ordonnées

Méthode

Le point d'intérséction a pour abscisse 0 et pour ordommée $f(0)$

¬ *On calcule* $f(0)$

¬ *Le point cherché a pour coordonnées* $(0; f(0))$

Exemple

Soit la fonction f définie su IR par : $f(x) = -6x^2 + x + 5$

Determiner le point d intersection de C la courbe représentative de f et de l'axe des ordonnées

Solution

Le point cherché à pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0)$.

Comme $f(0) = 5$, *on en déduit que le point d intersection de C et de laxe des ordonnées est le point de coordonnees* $(0;5)$