Exercice 1

Partie A

1. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*
$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \mathrm{Artan}(x) < x$$

2. a) *Montrer que :* $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} < x - \mathrm{Artan}(x) < \frac{x^3}{3}$

b) *Déduire* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \mathrm{Artan}(x)}{x^3}$ *et* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \mathrm{Artan}(x)}{x^2}$

3. *On considère la fonction h définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $h(x) = 2\mathrm{Artan}(x) - \frac{2x + x^3}{1 + x^2}$

a) *Montrer que le fonction h est strictement décroissante sur* $[1;+\infty[$ *et strictement croissante sur* $[0;1]$.

b) *Montrer que l'équation* $h(x) = 0$ *admet une unique solution* α *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et que :* $1 < \alpha < 2$ *(on prend :* $\mathrm{Artan}(2) \simeq 1,1$*)*

c) *Déduire le signe de* $h(x)$ *sur* $[0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x - \mathrm{Artan}(x)}}{x} & ;\ si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) *la courbe de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$; $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) *Vérifier que f est bien définie sur* $[0;+\infty[$.

2) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et déduire la banche infinie de* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

3) *Montrer que f est continue à droite en* 0.

4) a) *Etudier la dérivabilité de f à droite en* 0 *; puis donner une interprétation géométrique au résultat.*

b) *Montrer que le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $h(x)$ *sur* $[0;+\infty[$.

c) *Dresser le tableau de variation de f.*

5) *Construire* (C) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(on prend:* $\alpha \simeq 1,8$ *et* $f(\alpha) \simeq 0,48$*)*