

EXERCICE 1 : (4points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

0.25 1) Calculer u_1

0.5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_n > 0$.

1 3) a) Montrer que $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$; puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

0.5 b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 b) Déterminer v_n en fonction de n puis en déduire u_n fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

EXERCICE 2 : (5points)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

0.5 a) Vérifier que le déterminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

1 b) En déduire les solutions de l'équation (E).

2) Soient les nombres complexes : $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.75 a) Vérifier que : $b\bar{c} = a$; puis en déduire que : $ac = 4b$

0.5 b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

0.5 c) En déduire que : $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on considère les points B, C et D d'affixes respectives b , c et d telle que : $d = a^4$.

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

0.5 a) Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$

0.25 b) Déterminer l'image du point C par la rotation R.

0.25 c) Déterminer la nature du triangle OBC.

0.75 d) Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O ; B et D sont alignés.

EXERCICE 3 : (4points)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

0.5 1. a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$; $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 b) Montrer que g est croissante sur $[1; +\infty[$.

0.5 c) En dire que pour tout x de $[1; +\infty[$; $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

(On remarque que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)

1 d) Montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$; $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

0.75 2. a) Montrer que la fraction G définie par : $G(x) = x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

0.75 b) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x) dx$.

Problème : (7points)

On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité: 2cm)

0.5 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

0.5 2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

0.75 b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$; puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty; 2 + \ln 4]$ et au-dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4; +\infty [$.

0.5 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

0.25 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0.75 5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$; puis montrer que $A(2; 2)$ est un point d'inflexion de (C).

0.5 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

1 7) Construire (Δ) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

0.5 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0.75 b) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} . (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

0.75 c) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)