## Exercice 1 :(3,5 points)

Les partis I et II sont indépendantes.

I- On munit l'ensemble $I = ]0,+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$(\forall (a,b) \in I \times I) \qquad a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$

0,5 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $I$.

0,25 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre $\varepsilon$ que l'on déterminera.

0,75 3) a- Montrer que $(I \setminus \{1\},*)$ est un groupe commutatif. ($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble $I$ privé de 1).

0,25 b-Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $(I \setminus \{1\},*)$.

4) On munit $I$ de la loi de composition interne $\times$ ($\times$ est la multiplication dans $\mathbb{R}$ )

0,25 a- Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$

0,5 b- Montrer que $(I,\times,*)$ est un corps commutatif.

II- On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 1) Calculer $A^2$ et $A^3$

0,5 2) En déduire que la matrice $A$ est non inversible.

## Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

0,25 1) a- Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3+4i$

0,5 b- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)$ : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2) Soient $a$ et $b$ les solutions de l'équation (E) avec $Re(a) < 0$ et soient $A$ et $B$ leurs points images respectifs dans le plan complexe.

0,25 a- Vérifier que : $\frac{b}{a}=1-i$

0,75 b- En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A.

3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

0,5 a- Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D

0,5 b- Déterminer en fonction de c le nombre complexe l affixe du point L

0,75 c- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{l-c}{a-c}$ ; en déduire la nature du triangle ACL.

**Exercice 3 : (3 points)**

1 1) Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2+1\equiv 0[5]$

0,5 2) Soit p un nombre premier tel que $p=3+4k$ où k est un nombre entier naturel .Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2+1\equiv 0[p]$

0,25 a-Vérifier que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1[p]$

0,5 b- Montrer que n et p sont premiers entre eux.

0,75 c- En déduire que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1[p]$

0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2+1\equiv 0[p]$

**Exercice 4 : (6.25 points)**

I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=4xe^{-x^2}$

Soit $(C)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

0,5 1) Calculer la limite de f en $+\infty$

0,75 2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,75 3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $(C)$ à l'origine du repère puis construire la courbe $(C)$.(on prend $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe $(C)$ )

0,5 4) Calculer l'intégrale $a=\int_0^1 f(x)\,dx$ puis en déduire, en centimètre carré, l'aire de la partie plane limitée par la courbe $(C)$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x=1$

II) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à $2$ .

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x)=4x^n e^{-x^2}$

0,25 1) a- Montrer que : $(\forall x>1)\quad e^{-x^2}<e^{-x}$

0,25 b- En déduire la limite de $f_n$ quand x tend vers $+\infty$

0,75 2) Etudier les variations de $f_n$ la fonction n f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique $u_n$ de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(u_n)=1$

0,25 4) a- Montrer que : $(\forall n\geq 2)$ ; $f_{n+1}(u_n)=u_n$

0,75 b- montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose : $l=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

0,25 a- Montrer que : $0<l\leq 1$

0,25 b- Montrer que : $(\forall n\geq 2)$ ; $-\frac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c- En déduire que : $l=1$

**Exercice 5 :** (3.75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0,25 1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ on pose : $\varphi(x)=\int_1^x\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

0,25 a- Vérifier que : $(\forall x>0)\quad F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$

0,5 b- Montrer que $F$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ ; puis calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$.

0,5 c- En déduire le sens de variations de la fonction $F$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 3) a- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x>0)(\exists c\in]x;2x[)\ :F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x>0)\quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c- Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

0,75 d- Montrer que : $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$

en déduire que l'équation $F(x)=x$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$ .