La rotation dans le plan

Exercice 1:

ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ *Positif.*

Soit R_A *la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *et* R_O *une rotation de centre O et d'angle* α.

1) Déterminer $R_A(A)$; $R_A(B)$; $R_A(D)$.

2) Comment choisir α *pour avoir* $R_O(A)=B$

Comment choisir α *pour avoir* $R_O(A)=C$ *?*

Solution :

$R_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $R_O(O;\alpha)$

1) ■ $R_A(A)=A$ *Car le centre est le seul point invariant.*

■ $R_A(B)=D$ *Car* $\begin{cases} AB=AD \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ *(ABCD est un carré)*

■ $R_A(D)=B'$ *avec* B' *le symétrique de B par rapport à A.*

2) ■ $R_O(A)=B \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$

■ $R_O(A)=C \Leftrightarrow \alpha=\pi$

Exercice 2 :

ABCD est un carré tel que : tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ *Positif.*

Et soit R *la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

Décomposer la rotation R *en composée de deux symétries orthogonales.*

Solution :

$R=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$ *car* $(AC)\cap(AD)=\{A\}$ *et* $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

OU $R=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ *car* $(AB)\cap(AC)=\{A\}$ *et* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 3 :

ABC est un triangle.
On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A
1)Montrer que : $BE=CD$
2)Montrer que : $(BE)\perp(CD)$

Solution :

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $\begin{cases} AD = AB \\ \overline{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $R(D) = B$ (1)

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ \overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $R(C) = E$ (2)

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de (1) et (2) en déduit que : $BE=CD$

2) on a : $R(D) = B$ et $R(C) = E$

Donc : $\overline{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{EB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

par suite : $(BE) \perp (CD)$

Exercice 4 :

ABC est un triangle tel que : $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

déterminer : $R(E)$ et $R(C)$.

Et Montrer que : $\overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CE})} \equiv \overline{(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})}[2\pi]$

Solution :

on a : $\begin{cases} AE = AB \\ \overline{(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $R(E) = B$ (1)

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ \overline{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $R(C) = G$ (2)

Et on a : $R(A) = A$ (3) car A le centre de la rotation

De : (1) ; (2) et (3) on déduit que : $\overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CE})} \equiv \overline{(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})}[2\pi]$ (car la rotation conserve la mesure des angles)

Exercice5 :

ABCD est un carré de centre O tel que : $\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

Solution :

On considére R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

il suffit de montrer que : $R(I)=J$ On pose : $R(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} OB=OC \\ \overline{(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc $R(A)=B$ et $R(B)=C$.

On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (1) car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (2) De (1) et (2) on déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $R(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI=OJ \\ \overline{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$. Donc $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$.

Exercice 6 :

ABCD est un carré de centre O tel que : $\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}$ positif.

Soit la droite D parallèle à (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images de M et N respectivement Par la rotation R .

1) Faire une figure et Montrer que : $(EF)\perp(MN)$

2) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation R.

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\|(AC)$.

Solution :

1) on a : $R(M)=E$ (1) et : $R(N)=F$ (2) de (1) et (2) on deduit que: $\overline{(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc : $(EF)\perp(MN)$.

2) on a: $\begin{cases} OB=OC \\ \overline{(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ Donc : $R(B)=C$ (1)

Et on a : $\begin{cases} OD=OA \\ \overline{(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ Donc : $R(D)=A$ (2) de (1) et (2) on deduit que: $R((BD))=(AC)$.

3) On a: $R(D)=A$ (1) et $R(N)=F$ (2) donc : $DN=FA$.

On a : $(MN)\|(BD)$ et $R((BD))=(AC)$ et $R((MN))=(EF)$ Donc : $(MN)\|(EF)$ car la rotation conserve le parallélisme .

Exercice7 :

ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$ positif et le milieu du segment .

D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

Montrer ODE que est un triangle isocèles et rectangles en O.

Solution :

On considére R *la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

il suffit de montrer que : $R(E)=D$.

On pose : $R(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA=OC \\ \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ *Donc :* $R(C)=A \quad (1)$

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ *donc :* $R(A)=B \quad (2)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \quad (3)$ *De* (1) ;(2) *et* (3) *on déduit que :* $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad (4)$ *car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs .*

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad (5)$ *De* (4) *et* (5) *on déduit que :* $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ *càd* $E'=D$ *Donc :* $R(E)=D$.

par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \overline{(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OD})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ *Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O.*