Exercices sur la continuité

Exercice 1(avec solution)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-4} & si\ \ x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0=2$.

Exercice 2

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & si\ \ x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0=0$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-x^3 & si\ \ x\leq 1 \\ f(x)=3-x^2 & si\ \ x>1 \end{cases}$

1- Montrer que f est continue sur IR .

2- Dresser le tableau de variation de f .

3- Déterminer l'image par f des intervalles suivants :

$]1;+\infty[\,;\,]-\infty;-1];[0;3]$ *et IR.*

Exercice 4(avec solution)

1- Montrer que l'équation : $x^3+2x+1=5\sqrt{x}$ *admet au moins une*

Solution dans l'intervalle $[1;4]$

2- Montrer que l'équation : $5x^5+3x^3=1$ *admet une solution unique*

dans l'intervalle $]0;1[$.

3- on considère la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^4+x-1$
Montrer que la courbe C_f *coupe l'axe des abscisses une seule fois*
Sur l'intervalle $[-2;-1]$.

Exercice 5

On considère la fonction définie sur IR^+ *par :* $f(x)=x^3+2\sqrt{x}+x-5$

1- Dresser le tableau de variation de f .

2- Montrer que l'équation : $f(x)=0$ *admet une solution unique*
α *dans* IR^+ *et que* $1<\alpha<2$. .

3- Déterminer le signe de f sur IR^+.

Exercice 6

On considère la fonction définie sur IR *par :* $f(x)=x^3-3x^2+1$.

1- Montrer que l'équation : $f(x)=0$ *admet trois solutions différentes dans* IR *et déterminer l'intervalle de chaque solution.*

2- Déterminer le signe de f sur IR.

Exercice 7

On considère la fonction définie sur $]-\infty;1]$ *par :* $f(x)=x^2-2x$.

1- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

2- Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout x dans J.*

3- Construire dans un repère orthonormé la courbe de f et déduit une Construction dans le même repère la courbe de f^{-1}.

Exercice 8

On considère la fonction définie sur $[4;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-4\sqrt{x}+3$.

1- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

3- Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout x dans J.*

Exercice 9(avec solution)

on considère la fonction définie sur $[1;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-2\sqrt{x^2-1}$.

1- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Etudier les variations de f sur $[1;+\infty[$.

3- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

4- Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout x dans J.*

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=2x-1 & si\ x\leq 2 \\ f(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x-2} & si\ x>2 \end{cases}$

*1- Déterminer la valeur de **a** pour laquelle f est continue sur IR.*
2- Dresser le tableau de variation de f .
3- donner les images par f des intervalles $]-\infty;1]$ *et* $[-2;4]$.

Exercice 11

On considère la fonction définie sur $]-1;1[$ *par :* $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

2- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

3- Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout x dans J.*

Exercice 12

On considère la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

1- Déterminer D_f *et calculer les limites aux bornes de* D_f .

2- Montrer qu'il existe un réel α *dans* $\left[\frac{5}{4};2\right]$ *tel que :* $f(\alpha)=\alpha$.

3 - Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g^{-1}(x)$

c) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ *pour tout x dans J.*

d) Montrer que : $g^{-1}(\alpha)=g(\alpha)$.

Exercice 13

On considère la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$.

1- Déterminer D_f *le domaine de définition de f .*

2- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer .*

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(1)$.

Exercice 14 :

Soit f *la fonction définie sur* $IR-\{-1\}$ *par :*

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3} & x\neq 1 \\ f(1)=-\frac{1}{2} & \end{cases}$$

1/ Calculer : $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ *et* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$. *Donner une interprétation géométrique aux résultats*

2/ Montrer que :

a/ $(\forall x\in IR)\ f(x)=\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}$

b/ Déduire que f *est continue en* $x_0=1$