guessmaths

Examen nationale 2016 Session de Rattrapage

2éme Bac SM A et B

Exercice 1: (3 pts)

On a deux boites U et V.
La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.
La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.
On considère l'épreuve suivante :
On tire au hasard une boule de la boite U:
Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V;
si elle est bleue on la pose de côté puis on tire une boule de la boite V.
Soient les événements suivants:
RU « La boule tirée de la boite U est rouge »
BU « La boule tirée de la boite U est bleue »
RV « La boule tirée de la boite V est rouge »
BV « La boule tirée de la boite V est bleue »

1- Calculer la probabilité de chacun des deux événements RU et BU.

2- a) Calculer la probabilité de l'événement BV sachant que l'événement RU est réalisé.
 b) Calculer la probabilité de l'événement BV sachant que l'événement BU est réalisé.

3- Montrer que: la probabilité de l'événement BV est: $\dfrac{13}{21}$

4- En déduire la probabilité de l'événement RV.

Exercice 2: (3 pts)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire d'unité : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$$

et on considère l'ensemble $E=\left\{M(z)\,/\,z\in\mathbb{C}\right\}$

1- On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par : $(\forall z\in\mathbb{C})(\forall z'\in\mathbb{C})$:
$M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$
Montrer que : $(E,*)$ est un groupe commutatif.

2- On considère l'application : $\varphi : \mathbb{C}^* \to E$ qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E

a) Montrer que : φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

b) En déduire que : $(E-M(0),\times)$ est un groupe commutatif.

3- Montrer que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 3: (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$

1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$

b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$

a) Montrer que : l'ensemble (D) des points du plan complexe dont d'affixe z qui vérifie :

$z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que :

$z'=a\bar{z}-b$ et $z\neq b$

Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\dfrac{2}{|z-b|^2}$

c) En déduire que : la droite (D) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

Exercice 4: (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\ln(x)-\frac{n}{x}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n).

b) Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0,+\infty[$; puis dresser son tableau de variation.

c) Construire (C_2) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2- Montrer que : la fonction f_n est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3- a) Montrer que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

c) Montrer que : la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

4- a) Montrer que $\forall x>0 : \ln(x)<x$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

on pose : $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx$

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists c_n \in \left[\alpha_n,\alpha_{n+1}\right]\right) : I_n = f_n\left(c_n\right)$

b) Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right) : 0\leq I_n \leq \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

__Exercice 5__: (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n,+\infty[$

par : $g_n(x) = \displaystyle\int_n^x \frac{1}{\ln t}\,dt$

1- a) Montrer que : la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n,+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g_n'

b) Montrer que : la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n,+\infty[$

2- a) Montrer que $(\forall x\geq n) : g_n(x)\geq \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$ (On pourra utiliser l'inégalité: $(\forall t\geq 0)$; $\ln(1+t)\leq t$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

3- a) Montrer que : g_n est une bijection de l'intervalle $[n,+\infty[$ dans l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) En déduire que : $(\forall n\geq 2)$ $\left(\exists! u_n\geq n\right)$: $\displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$

4- On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ définie dans la question (3-b).

a) Montrer que $(\forall n\geq 2) : \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}\,dt$

b) En déduire que : la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.