Exercice 1

1) Donner la négation de la proposition suivante puis étudier sa valeur de vérité
$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): y^2=x$

2) Déterminer la valeur de vérité de la proposition suivante : $(\exists a\in\mathbb{N}) / a^2-7a+12<0$

3) Montrer que : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2): 3x-2y\le 4 \Rightarrow x\le 2$ ou $y\ge 1$

4) a) soient a et b deux entiers naturels distincts; montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $a-b$ divise a^n-b^n

b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; 7 divise $3^{2n}-2^n$

Exercice 2

Ecrire chacune des propositions suivantes en utilisant les quantificateurs puis donner leurs valeurs de vérité
P : « Pour fout entier naturel n ; il existe un entier naturel m tél que : $n=2m$ »
Q : « pour tout réel x et y ; il existe un entier naturel n tel que : $x+y=n$ »
R : « il existe un nombre réel M tel que pour tout x dans IR ; $x\le M$ »
S : « Pour tout m dans $\mathbb{R}$; il existe un réel x tel que : $x^2-mx+1=0$ »

Exercice 3

Donne la négation de chacune des propositions suivantes ; puis déterminer leurs valeurs de vérité.
(P): «$(\forall x\in\mathbb{R}): \sqrt{x^2+1}-|x|\ge 0$.
(R): $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): y<x$
(Q): $(\exists n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}): \dfrac{x^{2n}}{1+x}>1$.
(S): $(\forall x\in\mathbb{R})$: $x^2-|x|+1\ge 0$ et $-1\le x\le 1$.
(T): $(\forall x\ge 1): x^2+x-2\ge 0$.
(u): $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2+y^2+xy-3=0$

Exercice 4

Montrer que la proposition suivante est vraie : $(\forall x>1)\ (\forall y>1)$; $x\neq y \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}\neq\dfrac{y}{1+y^2}$

Exercice 5

Montrer que pour tous a et b dans $\mathbb{R}^+$; on a : $\sqrt{1+a}-\sqrt{a}<\sqrt{1+b}-\sqrt{b}\Leftrightarrow b<a$.

Exercice 6

Soient a et b deux nombres réels tel que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $(a<x\Rightarrow b<x)$
montrer que: $b\le a$.

Exercice 7

Soient x; y et z des nombres réels strictement positifs ; tels que : $xyz > 1$ *et* $x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Montrer par l'absurde que
1) $x \neq 1$ *et* $y \neq 1$ *et* $z \neq 1$.
2) $x < 1$ *ou* $y < 1$ *ou* $y < 1$

Exercice 8

En utilisant un raisonnement par disjonction des cas; montrer que:
1) $(\forall n \in \mathbb{N});\ \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \in \mathbb{N}$.
2) $(\forall n \in \mathbb{N});\ \frac{n^2+1}{3} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ a - \frac{1}{n} \leq b \leq a + \frac{1}{n}$
Montrer que : $a = b$,

Exercice 10

Soient n et p deux entiers naturels! non nuls, tels que $p > 1$ *;*
montrer par l'absurde que: si p divise n alors p ne divise pas $n+1$.

Exercice 11

1) soient a et b et c trois nombres entiers relatifs et impairs.
montrer que l'équation: $(E):\ ax^2 + bx + c = 0$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Q}$.
2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$

Exercice 12

Soient α *et* β *deux réels de* $[0;1]$
On pose $a = \alpha \cdot \beta$; $b = \alpha(1-\beta) + \beta(1-\alpha)$ *et* $c = (1-\alpha)(1-\beta)$
1) a) Montrer que : $b \geq 2\sqrt{a} - 2a$.
b) Montrer que : $a + b = 1 - c$.
2) Montrer par l'absurde que $a \geq \frac{4}{9}$ *ou* $b \geq \frac{4}{9}$ *ou* $c \geq \frac{4}{9}$

Exercice 13

Soient x; y et z des nombres réels de $[2;+\infty[$ *tels que :* $xy \leq z$.
En procédant par un raisonnement de disjonction des cas, montrer que $x + y \leq z$.

Exercice 14

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ (1+a)^n \geq 1 + na$ *où* $a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on pose :* $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 16

1) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right)$; $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *et* $b = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$.

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ *l'équation:* $9y^2 - (x+1)^2 = 32$.

Exercice 18

Soient x et y de $\mathbb{R}$.

Montrer que si : $x + y = 1$ *alors* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left(1 + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y^n}\right) \geq \left(1 + 2^n\right)^2$.