Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5u_n + 3} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5(5-u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déduire la monotonie de la suite (u_n).
2. Déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 5 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   2. Déduire que $u_n = 5 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ considérons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $w_n = \dfrac{3S_n}{5}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$.

Exercice 2

1) Résoudre dans l'équation : $z^2 - 4bz + 29 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A ; B et Ω d'affixes respectives a ; b et ω telles que : $a = 5 + 2i$; $b = 5 + 8i$ et $\omega = 2 + 5i$

a) Considérons $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3 + 3i$, puis montrer que $arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$.

c) Vérifier que : $a - \omega = \bar{u}$; en déduire que : $\Omega A = \Omega B$ et que : $arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 4}{u_n + 6} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 2$.

2- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et qu'elle est convergente.

3-On pose: $(\forall n \in \mathbb{IN})$; $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

4- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4

Une urne contient 8 boules : 3 boules qui portent le numéro 1 et une boule qui porte le numéro 0 et le reste portent le numéro 2 et toutes les Boules sont indiscernables au toucher.

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit des numéros que portent les deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X

3) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que: $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$; pour tout $x \in]0;+\infty[$

dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = x + 3\ln x - \dfrac{4\ln x}{x}$ -

On appelle (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$0.

b. Déterminer la limite de f à droite en 0; on remarquera que : $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$

Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$; $f(x)=x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x$

Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation $f(x)=x$.

4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y=x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$F(x)=-\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2.-On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm².

On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm² près