EXERCICE1.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+xe^{-x}$ *et* $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

On désigne par (C_f) *et* (C_g) *les courbes représentatives des fonctions et g dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unités graphiques:2cm),*

Partie A

1) a- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b- Montrer que pour tout réel x ; $f(x)=xe^{-x}\left(\frac{1}{2}xe^{-x}-e^{x}+1\right)$.

en déduire la limite de f en $-\infty$.

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

a- Déterminer la limite de h en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour les courbes f et g

b- Etudier le signe de $h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$;en déduire la position relative de (C_f) et (C_g).

Partie B

1) a- Après avoir justifié la dérivabilité de la fonction f. déterminé $f'(x)$.

b- Montrer que pour tout réel x. $f'(x)=(x-1)(1-e^{-x})$.

Etudier le signe de $f'(x)$ (pour tout $x\in\mathbb{R}$.

c- Dresser le tableau de variation complet de f.

2) Dresser le tableau de variation complet de g.

3) Tracer les courbes (C_f) et (C_g).dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 2.

On se propose dans cet exercice de calculer: $A=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\ln(\sin(x))dx$.

1) Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$

a- Déterminer les rées a, b et c tels que pour tout $x\in]-1;1[$, on a: $f(x)=a+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{1+x}$

b- En déduire la primitive F de f sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0.

2) Soit G la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x)=F(\cos x)$.

a- Montrer que G est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $G'(x)=-\frac{\cos^2 x}{\sin x}$

b- En déduire la valeur de $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$.

3) Calculer A.

EXERCICE 3.

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *vérifiant la condition* $(C):\begin{cases} f(-x)f'(x)=1 & \text{pour tout réel } x. \\ f(0)=-4 \end{cases}$

(où f' *désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de déterminer cette fonction.*

1) On suppose qu'il existe une fonction satisfaisant la condition (C) *et on considère alors la fonction g définie sur* $\mathbb{R}$ *par ;* $g(x)=f(-x)f(x)$.

a- Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b- Déterminer g' *la fonction dérivée de la fonction g. En déduire que g est constante.*

c- Montrer que pour tout nombre réel x. $f(-x)f(x)=16$.

d- Soit l'équation différentielle $(E): y'=\frac{1}{16}y$ *.Montrer que la fonction f est une solution de cette équation et qu'elle vérifie* $f(0)=-4$

2) Question de cours

a- On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ *est solution de l'équation différentielle* (E).

Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est l'ensemble des fonctions, définies sur* $\mathbb{R}$ *, de la forme* $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ *, où K est un nombre réel quelconque*

b- Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) *prenant la valeur* -4 *en* 0.

3) Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *satisfaisant la condition* (C) *et préciser quelle est cette fonction.*

EXERCICE 4

On considère la suite des nombres complexes (z_n) *définie pour tout entier naturel n par :* $z_n=\frac{1+i}{(1-i)^n}$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1) Pour tout entier naturel n, on note A_n *le point d'affixe* z_n.

a- Démontrer que pour tout entier naturel n ; $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ *est réel.*

b- Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n *et* A_{n+4} *Sont alignés.*

2) a- Donner la forme exponentielle des nombres complexes $1+i$ *et* $1-i$.

b- En déduire la forme exponentielle du nombre z_n.

c- Pour quelles valeurs de n le nombre z_n *est-il réel?*

EXERCICE 5.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z associe: $f(z)=z^2+2z+9$

1) Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ *par la fonction f.*

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *, l'équation* $f(z)=5$.

Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire à la règle et au compas les points A et B dont les affixes sont solution de l'équation.

(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

Laisser les traits de construction apparents.

3) Soit (F) *l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :* $|f(z)-8|=3$.

Prouver que (F) est le cercle de centre $(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$; tracer (F).

4) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

a- Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$.

b- On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE 6.

1) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont divisibles par 7.

2) Déterminer les restes de la division euclidienne des puissances de 2 par 7.

3) p étant un entier naturel. On pose : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

a- si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b- Démontrer que si $p = 3n+1$ alors A_p est un multiple de 7,

c- Pour $p = 3n+2$; A_p est-il divisible par 7 .Si non déterminer le reste de la division de A_p par 7.