

Exercice 1 (11pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}-1} ; \text{ si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1pt 1) Démontrer que f est continue en 1.
- 1,5pt 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter les résultats
- 1pt 3) a- Etablir que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{++}) : t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$
- 0,5pt b- En déduire : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2}$
- 0,5pt 4) a-Vérifier que : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) : \frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \left(\frac{\ln \sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \right)$
- 1pt b- En déduire que f est dérivable à droite en 1
- 0,5pt c- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln \sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \right) = \frac{-1}{2}$
- (on pourra faire le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ et utiliser (4-b))
- 1pt d- En déduire que f est dérivable en 1, puis interpréter graphiquement le résultat.
- 1,5pt 5) a- Montrer que : $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[) : f'(x) \leq 0$
(on pourra utiliser : $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln(x) \leq x-1$)
- 0,5pt b- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^{++}$
- 1pt 6) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]1,2[$.
- 1pt 7) Tracer la courbe (C).

Exercice 2 (9 pts)

On considère la suite numérique $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- 1,5pt 1) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
- $(\forall x \in]0,+\infty[) : \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$
- 1pt b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$
- 1pt c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$

1pt

a- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et que

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

1,5pt

b- En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite .

On note γ leur limite commune .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

0,5pt

a- Justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$

0,5pt

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = 2T_n$

1pt

c- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

1pt

d- En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis celle de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.