

Ex 1

$$g(x) = \frac{x^3 + 7x - 6}{|x-3|} \quad ; x \neq 3$$

g(3) = 20

On calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ , et comme  $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 + 7x - 6 = 45$  alors  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$ , par suite  $g$  n'est pas continue en 3.

Je crois que il y'a une erreur dans l'énoncé;  $g$  est définie comme suit

$$g(x) = \frac{x^3 - 7x - 6}{|x-3|} \quad ; x \neq 3$$

$g(3) = 20$

donc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 7x - 6}{|x-3|}$  ;  $x > 3 \Rightarrow |x-3| = x-3$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 7x - 6}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 3x + 2) = 20. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x - 6 & x-3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & x^2 + 3x + 2 \\ \hline 3x^2 - 7x - 6 & \\ 3x^2 - 9x & \\ \hline 2x - 6 & \end{array}$$

le diviseur euclidien

Donc  $g$  est continue à droite en 3.

de même  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 - 7x - 6}{|x-3|}$  ;  $x < 3 \Rightarrow |x-3| = -(x-3)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x^2 + 3x + 2)(x-3)}{-(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} -(x^2 + 3x + 2) = -20. \end{aligned}$$

Donc  $g$  n'est pas continue à gauche en 3.

Ex 2

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-2} & ; x \geq 2 \\ \frac{3}{3-x} & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2 \quad (\text{on le calcule ds } f(x) = x - \sqrt{x-2})$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{3-x} = 3 \neq f(2)$$

Donc  $f$  n'est pas continue en 2.

(car elle n'est pas continue à gauche en 2).

Mais  $f$  est continue sur  $[2; +\infty[$  comme somme de fonctions usuelles.

$f$  est continue sur  $]-\infty; 2[$  car  $]-\infty; 2[ \subset ]-\infty; 3[$

~~Donc~~  
Donc  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

Ex 3

$$\forall x \in [-1; +\infty[ : \begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2} \neq g(0)$$

Donc  $g$  n'est pas continue en 0.

( $g$  serait continue en 0 si  $g(0) = \frac{1}{2}$ )

Par suite  $g$  n'est pas continue sur  $I$ .

4) En utilisant la dichotomie.

$$\text{On calcule } f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \quad (4)$$
$$= 6 - \frac{1}{8} > 0$$

$$\text{et } f(-1) < 0$$

$$\text{Donc } \cancel{f(1)} \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{D'après TVI } -1 < \alpha < \frac{1}{2}$$

et  $\frac{-1+1}{2} = \frac{3}{2}$  donc l'amplitude est plus grande que  $5 \cdot 10^{-1}$

On reprend la dichotomie une 2<sup>ème</sup> fois

$$\text{On calcule } f\left(\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 6$$
$$= -\frac{1}{32} - \frac{6}{16} + 6$$
$$= -\frac{13}{32} + 6 > 0$$

$$\text{et } f(-1) < 0$$

$$\text{Donc d'après TVI, } -1 < \alpha < -\frac{1}{4}$$

et  $-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} = 0,75$  donc l'amplitude est plus grande que  $5 \cdot 10^{-1}$

On reprend la dichotomie un 3<sup>ème</sup> fois.

$$\text{On calcule } f\left(\frac{-1-\frac{1}{4}}{2}\right) = f\left(-\frac{5}{8}\right) \approx 4$$

(on le fait à la calculatrice)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{8} + 1 = \frac{3}{8} \\ \approx 5 \cdot 10^{-1} \end{array} \right.$$

$$f(-1) < 0 \text{ et } f\left(-\frac{5}{8}\right) > 0$$

D'après TVI  $-1 < \alpha < -\frac{5}{8}$  } Donc c'est le nombre demandé

EX6

(5)

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

1)  $f$  est un polynôme donc continue sur  $\mathbb{R}$   
en particulier sur  $[-1; 0]$ .

$$\text{De plus } f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) < 0 \text{ sur } [-1; 0].$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[-1; 0]$ .

$$e) f(0) = 1 > 0 \text{ et } f(-1) = -1 < 0.$$

$$\text{Donc } f(-1) \cdot f(0) < 0.$$

3)  $f$  est continue sur  $[-1; 0]$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $[-1; 0]$ .

$$\text{Donc } f(-1) \cdot f(0) < 0.$$

alors d'après TVI l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $-1 < \alpha < 0$ .

$$\text{et } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 = -1$$

Donc l'équation  $x^3 - x^2 = -1$  admet une unique solution  $\alpha / -1 < \alpha < 0$ .

EX7

On considère la fonction  $f(x) = x^3 - 5$ .

•  $f$  est continue sur  $[1; 2]$ .

•  $f$  est strictement croissante sur  $]1; 2[$ .

( $f'(x) = 3x^2 > 0$   $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ).

•  $f(1) = -4 < 0$  et  $f(2) = 3 > 0$  donc  $f(1) \cdot f(2) < 0$ .

D'après TVI l'équation  $f(x)=0$  (6)  
 c'est-à-dire  $x^3=5$  admet une unique  
 solution  $\alpha / 1 < \alpha < 2$ .

2) Utilisant la dichotomie pour donner un  
 encadrement plus petit à  $\alpha$ .

On calcule  $f(\frac{1+2}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - 5 < 0$ .

et  $f(2) > 0$  donc d'après TVI

$\frac{3}{2} < \alpha < 2$  et  $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$  une amplitude  
 plus grande que  $25 \cdot 10^{-2}$ .

Alors on refait la dichotomie; on calcule:

$$f(\frac{2+\frac{3}{2}}{2}) = f(\frac{7}{4}) = (\frac{7}{4})^3 - 5 = \frac{343}{64} - \frac{320}{64} > 0$$

~~Donc d'après~~ et  $f(\frac{3}{2}) < 0$ .

Donc d'après TVI  $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$

$$\text{et } \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 25 \cdot 10^{-2}$$

Par suite  $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$  est l'encadrement demandé

Ex 8  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x+1}; x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + \sqrt{-x}; x < 0 \end{array} \right.$

1) on voit bien que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$

$$f(0) = 1.$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$  donc  $f$  n'est pas  
 continue en 0. (pour la dérivabilité en 0; on  
 voit pour  $0^+$  et  $0^-$ ;  $f$  n'est pas  
 dérivable en  $0^-$ )

(7)

Ex 9

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \\ = [0; +\infty[$$

2.  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  Comme somme de deux fcts dérivable sur  $]0; +\infty[$   
 $(x \mapsto x \text{ et } x \mapsto -\sqrt{x})$

Étudions la dérivabilité à droite en 0.

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x - \sqrt{x}}{x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

$$\left( \text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \right)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 à droite.

Ex 10

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1) \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\} \\ = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

on étudie par  
tableau de signe  
celui de  $(x^2 - 1)$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $x+1$   | -         | 0    | +   |           |   |
| $x-1$   |           | -    | 0   | +         |   |
| $x^2-1$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

$$D_f = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

2. ~~est dérivable sur  $]-\infty; -1[$  et sur  $]1; +\infty[$~~  (8)

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Or a:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x + 1}{x - 1} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) \quad (\text{car } x > 1)$$

$$= +\infty \quad \left( \text{car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty \right)$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 1$ .

Ex 11

$f(x) = \sqrt{x-1}$  ;  $(\forall x \in [1; +\infty[)$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{x-1}} \quad (\text{car } x > 1)$$

$$= +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = 1$ .