Partie A

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation :
$2X^2 - 5X + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, de l'équation
$2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$. On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par
$f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$. Soit C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.

b. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On pourra

3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. Tracer C et T dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe C et l'axe (Ox).

b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par
$F(x) = x(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Correction

1.a. $2x^2-5x+2=0$; $\Delta=5^2-4\times2\times2=9$; $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=2$

1.b l'équation $2(\ln x)^2-5\ln x+2=0$. Posons $X=\ln x$

$2X^2-5X+2=0$. On a vu que $X=1/2$ ou $X=2$.

$\ln x=1/2 \Leftrightarrow x=e^{1/2}=\sqrt{e}$; $\ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$

Partie B

1.a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(2(\ln x)^2-5\ln x+2\right)$ or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$

d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 2(\ln x)^2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -5\ln x=+\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\left(2(\ln x)-5\right)+2=+\infty$.

3.a f est dérivable sur $]0;+\infty[$; $f(x)=2(\ln x)^2-5\ln x+2$

$$f'(x)=2\times2\times\frac{1}{x}\times\ln x-5\times\frac{1}{x}=\frac{4\ln x}{x}-\frac{5}{x}=\frac{4\ln x-5}{x}.$$

3.b $f'(x)=0\Leftrightarrow 4\ln x-5=0\Leftrightarrow 4\ln x=5\Leftrightarrow \ln x=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x=e^{5/4}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 4\ln x-5>0\Leftrightarrow 4\ln x>5\Leftrightarrow \ln x>\frac{5}{4}\Leftrightarrow x>e^{5/4}$

$$f(e^{5/4})=2(\ln e^{5/4})^2-5\ln(e^{5/4})+2=2(5/4\ln e)^2-5\times\frac{5}{4}\ln e+2$$

$$=2\times\frac{25}{16}-\frac{25}{4}+2=\frac{25-50+16}{8}=-\frac{9}{4}$$

x	0		$e^{5/4}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-9/4$	↗ $+\infty$	

c. En regardant le tableau de variation , on peut en déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$.

x	0		$\sqrt{e}$		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$: $y = f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

$f'(\sqrt{e}) = \dfrac{4\ln(\sqrt{e})-5}{\sqrt{e}} = \dfrac{4\times 1/2-5}{\sqrt{e}} = -\dfrac{3}{\sqrt{e}}$;

$f(\sqrt{e}) = 2\left(\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)^2 - 5\ln\left(\sqrt{e}\right) + 2 = 2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2} + 2 = 0$;

$y = \dfrac{-3}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e}) = \dfrac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$ donc (T) : $\boxed{y = \dfrac{-3}{\sqrt{e}}x + 3}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{(\ln x)^2}{x} - 5\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} = 0$ *donc*

la courbe (C) *admet, au voisinage de* $+\infty$,

une branche infinie de direction celle de $(0,\vec{i})$.

5.a. voir courbe

b. Calculons $F'(x)$. $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 9x\ln x + 11x$.

$F'(x) = 2(\ln x)^2 + \dfrac{4\times x\times \ln x}{x} - 9\ln x - 9x\times\dfrac{1}{x} + 11$

$F'(x) = 2(\ln x)^2 + 4\ln x - 9\ln x - 9 + 11$ d'où

$F'(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = f(x)$, F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

$F(e^2) = 2e^2\left(\ln e^2\right)^2 - 9e^2\ln e^2 + 11e^2 = 2e^2(2\ln e)^2 - 18e^2\ln e + 11e^2$
$= 8e^2 - 18e^2 + 11e^2 = -e^2$

$F(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\left(\ln\sqrt{e}\right)^2 - 9\sqrt{e}\ln\sqrt{e} + 11\sqrt{e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} - \dfrac{9}{2}\sqrt{e} + 11\sqrt{e}$

$= -4\sqrt{e} + 11\sqrt{e} = 7\sqrt{e}$ *donc* $F(\sqrt{e}) - F(e^2) = 7\sqrt{e} - (-e^2) = 7\sqrt{e} + e^2$