Exercice 1:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}+\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$

1- Déterminer D *ensemble de définition de f.*

*2- **a**- Calculer* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\left(\dfrac{2}{2x+1}+\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

*   **b**- Quelles sont les limites de f aux bornes de* D.

*3- **a**- Calculer* $f'(x)$ *tel x un élément de* D.

*   **b**- Donner le tableau de variation de f.*

4- Construire (C) *courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité 1cm)*

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)-\dfrac{\ln x}{x+1} & si\ \ x>0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$

tel que $\ln$ *représente la fonction logarithme népérien*

*1- **a**- Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

*   **b**- Vérifier que pour tout x de* $\mathbb{R}_+^*$ *on a :* $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+\ln 2$

*   **c**- Démontrer que f est continue à droite au point* $x_o=0$

*2- **a**- Etudier la dérivabilité de f à droite de* $x_o=0$.

*   **b**- Etudier les variations de f.*

*   **c**- Représenter graphiquement la fonction f.(prendre* $\ln 2\simeq 0,7$ *).*

Exercice 3:

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par: $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}$

($\ln$ *désigne logarithme népérien) et* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Démontrer que le domaine de définition D *de f est* $]-\infty;0[$.

*2- **a**- Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

*   **b**- Déterminer la branche infinie de* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

*3- **a**- Etudier la dérivabilité de f à gauche de 0, et interpréter géométriquement le résultat*

*   **b**- Etudier les variations de f.*

4- Construire (C_f) .

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie de $D =]0;+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$ *par:* $f(x) = a(\ln x)^3 + b(\ln x)^2 + 1$

a et b deux nombres réels, Ln est la fonction népérien. (C) *la courbe de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Déterminer a et b sachant que (C) *passe par le point* $A(e;0)$ *et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.*

2- On prend $a = 2$ *et* $b = -3$ *.*

***a**- Calculer les limites de f aux bornes de* D *.*

***b**- Par utilisation de changement de variable* $x = t^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t > 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ *puis étudier les branches infinies de la fonction f.*

***c**- Déterminer l'intersection de* (C) *avec l'axe des abscisses puis construire* (C) *(On prend* $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$ *et* $e \simeq 2,7$ *)*

***d**- Déterminer* g' *fonction dérivée de la fonction g définie de* $]0;+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$ *par :*

$g(x) = x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)$

3- Déterminer la fonction primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ *qui s'annule en* 1.

Exercice 5:

Sot f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$

*1- **a**- Vérifier que pour tout x de* $\mathbb{R}$ *on a:* $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

***b**- Déduire que f est définie sur* $\mathbb{R}$ *, puis calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f(2-x) = f(x)$ *puis déduire que la droite d'équation* $x = 1$ *est un axe de symétrie pour la courbe* (C).

*3- **a**- Vérifier que :* $\forall x \in [1;+\infty[$ *;* $f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$

***b**- Déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ *puis interpréter géométriquement le résultat.*

*4- **a**- Montrer que:* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$

***b**- Donner le tableau de variation de f sur* $\mathbb{R}$.

*5- **a**- Montrer que* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f''(x) = \dfrac{2x(2-x)}{\left((x-1)^2 + 1\right)^2}$

***b**- Etudier la concavité de la courbe* (C)

6- Construire la courbe (C).

7- Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$

***a**- Démontrer que h admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur un intervalle* J *que l'on déterminera*

***b**- Déterminer:* $h^{-1}(\ln(5))$ *; puis calculer.* $\left(h^{-1}\right)'(\ln(5))$.

Exercice 6:

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{2x+2}{3-x}\right)$

1-Déterminer D *ensemble de définition de f.*

2- Calculer: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

3- Donner le tableau de variation de f.

4- ***a-*** *Soit x un élément de* D *.*

b- *Démontrer que* $(\forall x\in D)$; $f(2-x)=2\ln 2-f(x)$

c- *Déduire que la courbe* (C_f) *admet un centre de symétrie à déterminer.*

5- Déterminer l'intersection de (C_f) *avec les axes du repère.*

6- Déterminer l'équation de la tangente (C_f) *au point d'abscisse* 1 .

7- Construire (C_f) .

8- ***a-*** *Montrer que f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle* J *que l'on déterminera.*

b-*Déterminer* $f^{-1}(2)$ *puis calculer* $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Exercice 7 :

Partie I:

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$

1- ***a-*** *Démontrer* $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g'(x)=3\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

b- *Déduire la monotonie de g sur l'intervalle* $]0;+\infty[$

2- Calculer $g(1)$ *; puis déduire que :* $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$

et soit (C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- ***a-*** *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *, puis interpréter géométriquement le resultatCx0"lim =0,*

b-*Montrer que* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ *puis déduire* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2- ***a-*** *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=-x+1$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

b- *Etudier la position relative de* (C_f) *et la droite* (Δ)

3- ***a-*** *Montrer que* $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b- *Calculer* $f'(1)$, *puis donner une interprétation géométrique du résultat.*

c- *Etudier les variations de f.*

4- Construire la courbe (C_f).

Partie III:

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par:* $\begin{cases} U_o = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{\ln(U_n)}{\sqrt{U_n}} + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1-Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $U_n \geq 1$

2- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ *;* $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$ *et déduire la monotonie de* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3- Déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

<u>Exercice 8</u> *:*

I- On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $g(x) = 2\ln x - 1 + x$.

*1- **a-** Calculer* $g'(x)$ *; pour tout* $x \in]0;+\infty[$.

b- *Déduire la monotonie de g sur* $]0;+\infty[$.

2- Calculer $g(1)$ *, puis déduire que:* $(\forall x \in [1;+\infty[)$ *;* $g(x) \geq 0$ *et* $(\forall x \in]0;1])$ *;* $g(x) \leq 0$.

II- On considère la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x) = \ln^2 x - \ln x + x$ *et soit* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

2- a) Montrer que: $(\forall x \in]0;+\infty[)$ *;* $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

b) Déduire les variations de f.

3- Montrer que (C) *admet et une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$

4- a) Déterminer la position relative de la courbe (C) *et la droite* (Δ).

b) Construire (Δ) *et* (C).

<u>Exercice 9:</u>

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $g(x) = 2\ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

*2- **a-** Calculer* $g'(x)$ *; pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *puis déduire que g est croissante sur* $]0;+\infty[$

b- *Donner le tableau de variation de g .*

3- Calculer $g(1)$ *puis déduire que* $(\forall x \in]0;1])$ *;* $g(x) \leq 0$ *et* $(\forall x \in [1;+\infty[)$ *;* $g(x) \geq 0$

II- Soit f une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $f(x) = (2x-1)\ln(x) - x + 1$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ *et puis interpréter géométriquement le résultat.*

*2- **a-** Calculer les limites* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b- *Interpréter géométriquement les résultats obtenus*

*3- **a-**Montrer que* $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $f'(x) = g(x)$

b- *Donner le tableau de variation de f.*

4- Construire (C).

Exercice 10:

Partie I:

On considère les deux fonctions numériques définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *par :*

$h(x)=x+(x-2)\ln(x)$ *et* $g(x)=x-1-\ln x$.

1- **a-** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$ *puis étudier les variations de g.*

b - *Déduire que* $g(x)\geq 0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$

2- **a-** *Montrer que* $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$ *; pour tout x de* $]0;+\infty[$

b- *Montrer que* $(x-1)\ln x\geq 0$ *; pour tout x de* $]0;+\infty[$.

3 - *Déduire que* $h(x)>0$ *; pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$

Partie II:

On considère la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$

et soit (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- **a-** *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *; puis interpréter géométriquement le résultat. x>0*

b- *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *; puis étudier la branche infinie de* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

Remarquer que: $f(x)=1+x\ln x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

2- **a-** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.

b- *Déduire que la fonction f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$

3- *Soit* (Δ) *la droite tangente à* (C) *au point* $A(1;1)$.

a- *Montrer que l'équation cartésienne de* (Δ) *est* $y=x$.

b- *Vérifier que:* $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$

c- *Etudier le signe de* $f(x)-x$ *; puis déduire la position relative de la courbe* (C) *et de la droite* (Δ)

4- *Construire la courbe* (C) *et la droite* (Δ) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admis que (C) *admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre* 1 *et* $1,5$ *).*

Partie III :

On considère la suite (u_n) *définie par:* $u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $u_0=\sqrt{2}$

1-*Montrer par récurrence que pour tout n de* $\mathbb{N}$ *:* $1<u_n<e$.

2- *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante (tu peux utiliser la question 3)* ***c-*** *de la* ***partie II****)*

3- *Déduire que la suite est convergente, puis calculer sa limite.*

Exercice 11:

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite numérique définie par :* $u_n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.

1-*Montrer que :* $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$ *et déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est strictement décroissante*

2- *On pose:* $v_n=u_1+u_2+...+u_n$

a-*Calculer* v_n *en fonction de n.*

b- *est-ce que* $(v_n)_{n\geq 1}$ *est convergente ? justifier.*

3-On pose : $w_n = u_n + u_{n+1} + ... + u_{2n}$

a- *Calculer* w_n *en fonction de n.*

b- *est-ce que la suite* $(w_n)_{n\geq 1}$ *est convergente ? justifier.*