guessmaths

Série n°10 sur « les suites numériques » **1ére Bac Sc.Exp**

Monotonie d'une suite

Exercice 1

1- Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{10}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} - 3u_n + 9}{u_n} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante et que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $3 \leq u_n \leq \dfrac{10}{3}$

2- On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n^{\ 2}}{1+v_n^{\ 2}} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n > 0$ et $v_n \leq \dfrac{1}{2}$

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. En déduire que (v_n) est décroissante.

3 -Soit (t_n) la suite définie par : $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{3}{2}} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

Montrer que (t_n) est strictement décroissante.

4 Soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f(x) = x^2 - 2x$.

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \geq 3$.

b. Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Correction

1- On a : $u_0 = \dfrac{10}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} - 3u_n + 9}{u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

a. Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$.

Pour $n = 0$:

On a : $u_0 = \dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{10}{3} \geq 3$ donc : $u_0 \geq 3$.

Donc, la propriété est vraie pour n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n \geq 3$ et montrons que : $u_{n+1} \geq 3$

On a : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{u_n^{\ 2} - 3u_n + 9}{u_n} - 3$

$$= \frac{u_n^2 - 3u_n + 9 - 3u_n}{u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{u_n}$$

$$= \frac{(u_n - 3)^2}{u_n}$$

Comme $\frac{(u_n-3)^2}{u_n} \geq 0$ *(car* $u_n \geq 3 > 0$*) alors:* $u_{n+1} \geq 3$.

Conclusion

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} - u_n = \frac{3(3-u_n)}{u_n}$

Comme $u_n \geq 3$ *alors :* $3(3-u_n) \leq 0$ *et* $u_n > 0$.

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ *c'est-à-dire :* $u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq u_n$

Donc, la suite (u_n) *est décroissante. et par suite :* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0$ *(Toute suite décroissante est majorée par son premier terme) c'est-à-dire :* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq \frac{10}{3}$ *et comme* $u_n \geq 3$ *; alors :*

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $3 \leq u_n \leq \frac{10}{3}$

2- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \frac{2v_n^2}{1+v_n^2}$

a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n > 0$ *et* $v_n \leq \frac{1}{2}$

Pour $\boldsymbol{n = 0}$

On a : $v_0 = \frac{1}{2}$ *; donc :* $v_0 > 0$ *et* $v_0 \leq \frac{1}{2}$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Supposons $v_n > 0$ *et* $v_n \leq \frac{1}{2}$ *et montrons que :* $v_{n+1} > 0$ *et* $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

On a : $v_n > 0$ *et* $v_{n+1} > 0$ *par construction.*

D'où : Vn+1 > 0

On a : $v_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2v_n^2 \leq \frac{1}{2}$ (1) *et* $1 + v_n^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+v_n^2} \leq 1$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $v_{n+1} = \frac{2v_n^2}{1+v_n^2} \leq \frac{\frac{1}{2}}{1}$;

Donc : $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Ainsi : $v_{n+1} > 0$ *et* $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Conclusion

On a montré par récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n>0$ *et* $v_n\le\frac{1}{2}$

b. On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n>0$ *et* $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2v_n}{1+v_n^2}$

comme $\frac{1}{1+v_n^2}\le 1$ *et* $v_n\le\frac{1}{2}$

On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2v_n}{1+v_n^2}\le 1$

Donc: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n>0$ *et* $\frac{v_{n+1}}{v_n}\le 1$

D'où : la suite (v_n) *est décroissante.*

3- On a : $\begin{cases} t_0=1 \\ t_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}t_n+\frac{3}{2}} \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $t_{n+1}\ge t_n$

Pour $\boldsymbol{n=0}$

On a : $t_1=\sqrt{\frac{1}{2}t_0+\frac{3}{2}}=\sqrt{2}$

Donc : $t_1\ge t_0$ *(car* $\sqrt{2}>1$*)*

La propriété est donc vraie pour n= 0.

Soit $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$

Supposons que : $t_{n+1}\ge t_n$ *et montrons que :* $t_{n+2}\ge t_{n+1}$,

On a : $t_{n+1}\ge t_n\Rightarrow\frac{1}{2}t_{n+1}+\frac{3}{2}\ge\frac{1}{2}t_n+\frac{3}{2}$

la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *; alors :* $\sqrt{\frac{1}{2}t_{n+1}+\frac{3}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}t_n+\frac{3}{2}}$

Donc: c'est-à-dire : $t_{n+2}\ge t_{n+1}$

Conclusion

On a montré par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $t_{n+1}\ge t_n$

donc : (t_n) *est croissante.*

4 - $w_0=4$ *et* $w_{n+1}=f(w_n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *où* $f(x)=x^2-2x$.

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$

a. Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $w_n\ge 3$.

Pour $\boldsymbol{n=0}$

On a: $w_0=4$ *et* $4\ge 3$ *donc:* $w_0\ge 3$.

c'est-à-dire que la propriété est vraie pour n = 0.

Soit $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$

Supposons que $w_n\ge 3$ *et montrons que :* $w_{n+1}\ge 3$

f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$; $w_n\ge 3$

donc: $f(w_n) \geq f(3)$ et comme $f(3)=3$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ alors: $w_{n+1} \geq 3$.
Ainsi, la propriété est vraie pour n+ 1 .

Conclusion

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \geq 3$.

b. Montrons que (w_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$;

On a : $w_{n+1} - w_n = f(w_n) - w_n$

$$= w_n^{\ 2} - 3w_n$$

$$= w_n(w_n - 3)$$

comme $w_n \geq 3$ alors : $w_{n+1} - w_n \geq 0$; et par conséquent, la suite (w_n) est croissante.