Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1/ Calculer U_1 *et* U_2.

2/ Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in IN)\ \ U_n > \frac{1}{2}$$

3/ Etudier la monotonie de (U_n).

En déduire que : $(\forall n \in IN) \quad U_n \leq 1$

Exercice 2 :

Soit la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3 - U_n} \end{cases} (\forall n \in IN)$

1/ Calculer U_1 *et* U_2.

2/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \quad 1 < U_n < 2$

3/ Vérifier que : $(\forall n \in IN)\ U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$

Puis déduire la monotonie de (U_n)

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) *définie par :*

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad 0 < U_n < 1$

2/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

Puis déduire la monotonie de (U_n)

3/ On pose : $(\forall n \in IN)\ V_n = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.*

b/ Donner V_n *puis* U_n *en fonction de n.*

Exercice 4 :

Soit la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ U_n > \dfrac{3}{2}$

Puis étudier la monotonie de (U_n).

2/ On pose : $V_n = \dfrac{2}{2U_n - 3}$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.*

b/ Donner V_n *puis* U_n *en fonction de n.*

Exercice 5 :

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + \dfrac{U_n^2}{2}} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \quad 0 < U_n < 1$

2/ Comparer U_n^2 *et* U_{n+1}^2 *et déduire la monotonie de* (U_n).

3/ On passe : $V_n = U_n^2 - 4 \ \ (\forall n \in IN)$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son terme initiale.*

b/ Donner V_n *et* U_n *en fonction de n.*

c/ Calculer la somme S_n *en fonction de n tel que :* $S_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2$

Exercice 6 :

Soit la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{4U_n + 6} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1/ Calculer U_1 *et* U_2.

2/ Montrer que : $\forall n \in IN\ 0 \le U_{n+1} \le U_n$

3/ On pose : $\forall n \in IN\ V_n = (2n+1)U_n$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \dfrac{1}{2}$.

b/ Déduire l'expression explicite de V_n *en fonction de n.*

c/ Donner U_n *en fonction de n ; puis calculer* $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$

Exercice 7 :

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{8} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{1-2U_n^2} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad 0 < U_n < \dfrac{1}{4}$

2/ Etudier la monotonie de (U_n). *Que peut-on déduire ?*

3/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} < \dfrac{2}{7}$

4/ Déduire que : $(\forall n \in IN) \quad U_n \leq \left(\dfrac{2}{7}\right)^n U_0$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Exercice 8 :

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad -2 < U_n < 2$.

2/ Etudier la monotonie de (U_n) *; et déduire que* (U_n) *est convergente.*

3/ On pose : $(\forall n \in IN) \quad V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a/ Montrer que (V_n) *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme*

b/ Donner l'expression de V_n *et* U_n *en fonction de n. Et calculer :* $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$$

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^+$.

2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in IR^+)\ f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$.

b/ Déduire la monotonie de f sur : $[0;1]$

c/ Montrer que : $f([0;1]) = [0;1]$.

3/ On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

a/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad U_n \in [0;1]$.

b/ Etudier la monotonie de (U_n).

c/ Déduire que (U_n) *est une suite convergente et calculer sa limite.*

Exercice 10 :

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 \in]-1;0[\\ U_{n+1} = U_n + U_n^2 \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

Et on pose la fonction : $f(x) = x + x^2$.

1/ Montrer que : $f(]-1;0[) \subseteq]-1;0[$.

2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad U_n \in]-1;0[$.

b/ Montrer que (U_n) *est une suite croissante.*

3/ Montrer que (U_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Et (C_f) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Déterminer D_f *puis calculer les limites de f aux bornes de* D_f.

b/ Déterminer les 2 branches infinies à (C_f).

2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in D_f)\ f'(x) = \left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ Etudier la position relative de (C_f) *et la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$.

4/ Vérifier que : $f(4) = \frac{5}{2}$ *et* $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$

5/ soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur une intervalle $\mathcal{J}$ *à déterminer.*

b/ Construire $(C_{g^{-1}})$ *dans le même repère.*

c/ Calculer $g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$.

6/ On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

a/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad U_n > 1$.

b/ Montrer que la suite (U_n) *est décroissante.*

c/ Déduire que (U_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*