Correction Examen National baccalauréat Session Normale 2023 2éme Bac PC - SVT

Exercice 1

$A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$; $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}(2,0,-2)$ et $\overrightarrow{AB}(2,4,-4)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

$$=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

D'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

b) Soit $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2\left(2^2+1^2+2^2\right)} = 6$$

Alors : $\mathcal{A}_{ABC}=6$ u.aire .

et $d\left(B;(AC)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{AC}=\dfrac{2\times 6}{6}=2$

Donc : $d\left(B;(AC)\right)=2$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$.

a) D est milieu de $[AC]$ donc : $D\left(\dfrac{x_A+x_C}{2},\dfrac{y_A+y_C}{2},\dfrac{z_A+z_C}{2}\right)$; d'où $D(1,3,2)$

et $\Omega(3,4,4)$, alors $\overrightarrow{D\Omega}(2,1,2)$ soit $\overrightarrow{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ et comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

Alors $\overrightarrow{D\Omega}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

b) D'après la question précédente on a : $\overrightarrow{D\Omega}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

Donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ qui est normale au plan (ABC); et comme D est le milieu du segment $[AC]$alors $D\in(ABC)$; d'où D est le projeté orthogonale de Ω sur le plan (ABC), par suite :

$$d\left(\Omega;(ABC)\right)=\left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\|=\left\|2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3 \quad .$$

Donc : $d\left(\Omega;(ABC)\right)=3$

3) $(S):x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

a) on a : $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2-6x+9-9+y^2-8y+16-16+z^2-8z+16-16+32=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=3^2$$

Donc (S)est la sphère de centre $\Omega(3,4,4)$ et de rayon $R=3$

b) D'après la question 2) b) on a : $d\left(\Omega;(ABC)\right)=3$

Donc $d\left(\Omega;(ABC)\right)=R$; d'où le plan (ABC) est tangent à (S).

•) On a : $D \in (ABC)$ et $(x_D-3)^2+(y_D-4)^2+(z_D-4)^2=3^2$

Donc D appartient à (S)

Par conséquent le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point D.

4) (Q_1) et (Q_2) sont parallèles au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{D\Omega}$ est un vecteur normale au deux plan ; d'où $2x+y+2z+\alpha=0$ est une équation cartésienne de l'un des deux plans (Q_1) et (Q_2). Posons $d=d(\Omega,(Q_1))$

(Q_1) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$ et on a 3 est le rayon de (S) ; donc :

$\sqrt{5}=\sqrt{3^2-d^2}$; soit $d^2=9-5=4$ d'où $d=2$

Ainsi $\dfrac{|6+4+8+\alpha|}{\sqrt{4+1+4}}=2$; d'où $|18+\alpha|=6$. Donc $18+\alpha=6$ ou $18+\alpha=-6$

Soit $\alpha=-12$ ou $\alpha=-24$

D'où $2x+y+2z-12=0$ et $2x+y+2z-24=0$ sont respectivement deux équations cartésiennes des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2

$A\left(a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$; $B\left(b=1+\sqrt{2}+i\right)$; $C\left(c=\overline{b}\right)$ et $D(d=2i)$.

1) On a : $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; donc $|a|=\sqrt{2+2}=2$

Alors $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Donc $a=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

2) a) on a : $b-d=1+\sqrt{2}+i-2i$

$=1+\sqrt{2}-i=\overline{b}$ Donc $b-d=c$

b) on a : $b-a=1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$=1+i\left(1-\sqrt{2}\right)$

D'où $\left(1+\sqrt{2}\right)(b-a)=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$

$=\left(1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$

$=1+\sqrt{2}-i=c=b-d$

Donc $\left(1+\sqrt{2}\right)(b-a)=b-d$

Par suite $\dfrac{b-d}{b-a}=\left(1+\sqrt{2}\right)$ d'où $\dfrac{b-d}{b-a}\in\mathbb{R}$

Alors les points A ; B et D sont alignés.

3) a) on a : $ac=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(1+\sqrt{2}-i\right)=\sqrt{2}(1+i)\left(\sqrt{2}+(1-i)\right)$

D'où $ac=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}+(1+i)(1-i)\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2\right)$

Soit $ac=2\left(1+\sqrt{2}+i\right)=2b$. Donc $ac=2b$

b) D'après la question précédente ; on a : $ac=2b$ et $c=\overline{b}$ donc $a\overline{b}=2b$

Alors $\arg\left(a\overline{b}\right)\equiv\arg(b)[2\pi]$ (car $2>0$)

D'où $\arg(a)+\arg\left(\overline{b}\right)\equiv\arg b[2\pi]$

Donc $\arg(a)-\arg(b)\equiv\arg b[2\pi]$

Par suite $2\arg(b) \equiv \arg(a)[2\pi]$

D'où $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit $R = R\left(O;\frac{\pi}{4}\right)$

a) On a : $M'(z') = R(M(z)) \Leftrightarrow z'-0 = (z-0)e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z' = ze^{i\frac{\pi}{4}}$

et $a = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, donc $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}a$

D'où $z' = \frac{1}{2}az$

b) • on sait que : $ac = 2b$ donc $b = \frac{1}{2}ac$; alors

• On a : $a^2 = 2(1+i)^2 = 2\times 2i = 2d$

Donc $d = \frac{1}{2}a\times a$. D'où $R(A) = D$

c) D'après la question 2) b) on a : $(1+\sqrt{2})(b-a) = b-d$ donc $\frac{b-a}{b-d} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\frac{b-a}{a(c-a)} = \frac{b-a}{ac-a^2}$. Et

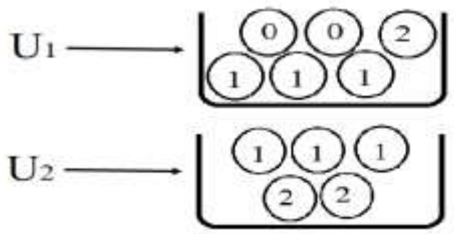
on a : $ac = 2b$ et $a^2 = 2d$, donc $\frac{b-a}{a(c-a)} = \frac{b-a}{2b-2d} = \frac{1}{2}\times\frac{b-a}{b-d}$

D'où $\frac{b-a}{a(c-a)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Donc $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$

On en déduit que : $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg(a)[2\pi]$ (car $\frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$)

$\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Par suite $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$



Exercice 3

$Card\Omega = C_6^1 \times C_6^1 = 36$.

1) a) A « La boule tirée de U_1 porte le numéro 1 »

$CardA = C_3^1 \times C_6^1 = 18$; donc $p(A) = \frac{C_3^1\times C_6^1}{36} = \frac{18}{36}$

D'où $p(A) = \frac{1}{2}$

b) **1ére méthode**

B « Le produit des numéros que portent les deux boules tirées est égale à 2 »

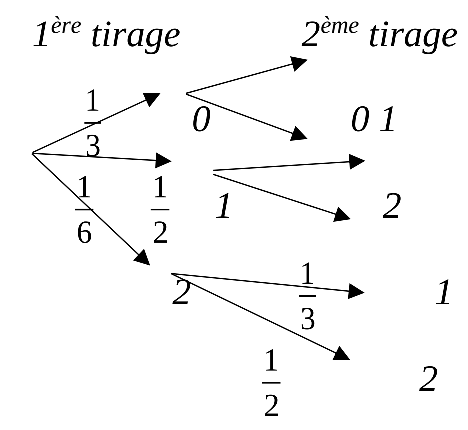
Donc On tire une boule qui porte le numéro 1 de l'urne U_1 et une boule qui porte le numéro 2 de l'urne U_2 ou Une boule qui porte le numéro 2de l'urne U_1 et une boule qui porte le numéro 1 de l'urne U_2.

D'où $p(B) = \frac{C_3^1\times C_2^1 + C_3^1\times C_2^1}{36} = \frac{9}{36}$

Donc $p(B) = \frac{1}{4}$

2éme méthode

Utilisation de l'arbre



D'après l'arbre ci-contre on a deux Chemin pour réaliser l'événement B ;

alors : $p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Donc $p(B)=\frac{1}{4}$

2) ***<u>1ére méthode</u>***

$p(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_6^1\times C_6^1}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *, donc*

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

<u>2éme méthode</u>

D'après l'arbre ; on a : $p(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Donc $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$ *D'où* $p(A/B)=\frac{2}{3}$

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit ab.

a) l'événement " $X=0$ *" « La première boule tirée porte le numéro 0 »*

$p(X=0)=\frac{C_2^1\times C_6^1}{36}=\frac{1}{3}$ *. Donc* $p(X=0)=\frac{1}{3}$

b) Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ;2 et 4

- $p(X=2)=p(B)=\frac{1}{4}$
- *"* $X=1$ *" « Le produit des numéros que portent les deux boules tirées est égale à 1 »*

Donc l'événement " $X=1$ *" signifie « Les deux boules tirées portent les numéros 1 ;1 »*

$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{36}=\frac{12}{36}$ *. Donc* $p(X=1)=\frac{1}{3}$

- *"* $X=4$ *" « Le produit des numéros que portent les deux boules tirées est égale à 1 »*

Donc l'événement " $X=4$ *" signifie « Les deux boules tirées portent les numéros 2 ;2 »*

$p(X=4)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{36}=\frac{3}{36}$ *. Donc* $p(X=4)=\frac{1}{12}$

<u>Loi de probabilité de X :</u>

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

c) M : " le produit ab est pair non nul."

Donc, M est l'événement $(X=2)$ *union l'événement* $(X=4)$ *qui sont disjoints.*

Alors $p(M)=p(X=2)+p(X=4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

N : " le produit ab est impair égale à 1"

Donc N est l'événement $(X=1)$

D'où $p(N)=p(X=1)=\frac{1}{3}$. *Par suite* $p(N)=p(M)=\frac{1}{3}$

Donc les événements M et N sont équiprobables.

<u>Problème</u>

$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

1) *a) Pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *on a :* $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2=\frac{2x-2+x(1-\ln x)^2}{x}$

Soit $f(x)=\frac{2x-2+x\left(1-2\ln x+(\ln x)^2\right)}{x}=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

Donc $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

b) Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2$

On pose $t=\sqrt{x}$ *; alors* $x=t^2$ *et* $x\to0^+$ *;* $t\to0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2=\lim\limits_{t\to0^+}t^2(\ln t^2)^2$

$=\lim\limits_{t\to0^+}t^2(2\ln t)^2=\lim\limits_{t\to0^+}4(t\ln t)^2=0$ *(car* $\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$*)*

D'où $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2=0$

Et (on pose $t=\sqrt{x}$ *; alors* $x\to+\infty$ *;* $t\to+\infty$*) ; donc :*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$ *(car* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$*)*

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

c) On a : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}=-\infty$

(Car $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2=0$ *;* $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ *)*

D'où $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

<u>Interprétation géométrique</u>

(C_f) *admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale (la droite d'équation* $x=0$*).*

c) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2=+\infty$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$ *; et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ *)*

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

● *Calculons* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

(car $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ *)*

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

<u>Interprétation géométrique</u>

(C_f) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

2) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ *on a :* $f'(x) = \frac{2}{x^2} + 2(1-\ln x)(1-\ln x)' = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}(1-\ln x)$

Donc $f'(x) = \frac{2-2x(1-\ln x)}{x^2}$

Donc $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

3) a) D'après le tableau de variations de f' *on déduit que :* $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) > 0$ *; donc f est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$

<u>Tableau de variations de f sur</u> $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

b) D'après le tableau de variations de f' *on conclut que :*

- f' *est décroissante sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[\beta;+\infty[$ *; donc sa dérivée seconde est négative sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[\beta;+\infty[$.
- f' *est croissante sur l'intervalle* $[1;\beta]$ *; donc sa dérivée seconde est positive sur l'intervalle* $[1;\beta]$. *D'où* ***<u>le tableau de signe de</u>*** f'' :

x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) (C_f) *est concave sur chacun des intervalles* $]0;1]$ *et* $[\beta;+\infty[$ *; et convexe sur l'intervalle* $[1;\beta]$.
Et comme f' *est dérivable et elle admet deux extremums d'abscisse* 1 *et* β *alors sa dérivée* f'' *s'annule en* 1 *et* β *; de plus elle change de signe en ces deux valeurs , par suite les points d'abscisse* 1 *et* β *sont des points d'inflexion de* (C_f).

4) $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g(x) = f(x) - x$

a) D'après le graphique de la courbe $\left(C_g\right)$, on déduit que $\left(C_g\right)$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessous de l'axe des abscisses sur chacun des intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$; d'où **le tableau de signe de** $g(x)$:

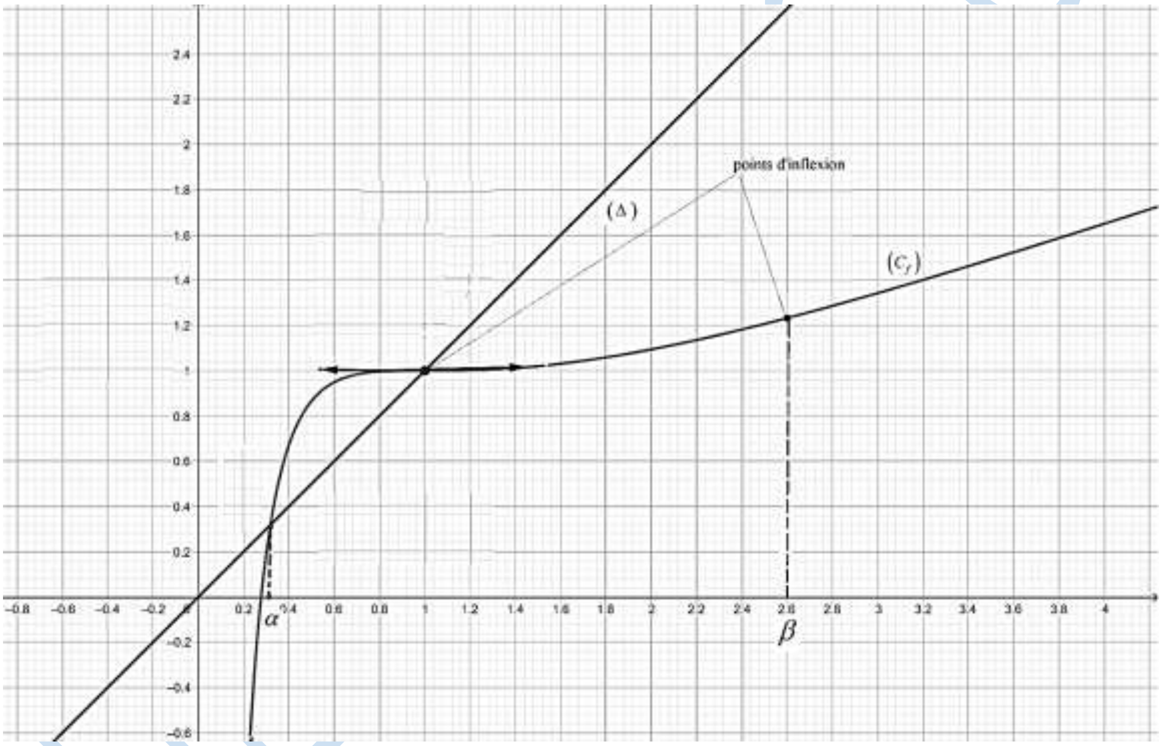
x	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) D'après la question précédente ; on a

●) $f(x)-x\geq 0$; $(\forall x\in[\alpha;1])$ donc la droite (Δ) est au-dessous de $\left(C_f\right)$ sur l'intervalle $[\alpha;1]$.

●) $f(x)-x\leq 0$ sur l'intervalle $]0;\alpha]$ et sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc la droite (Δ) est au-dessus de $\left(C_f\right)$ chacun des intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$.

5) **Construction de** $\left(C_f\right)$ **et la droite** (Δ) **dans le repère** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



6) a) La fonction $h: x\mapsto 2x-x\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a :

$$h'(x)=2-\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=2-\ln x-1=1-\ln x$$

Donc $(\forall x\in[\alpha;1])$; $h'(x)=1-\ln x$

D'où la fonction $h: x\mapsto 2x-x\ln x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto 1-\ln x$ sur $[\alpha;1]$.

b) En utilisant une intégration par parties ; on pose :

$$\begin{cases} u(x)=(1-\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases} \quad , \text{ alors } \begin{cases} u'(x)=\dfrac{-2}{x}(1-\ln x) \\ v(x)=x \end{cases}$$

Donc : $\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2\,dx=\left[x(1-\ln x)^2\right]_\alpha^1-\int_\alpha^1 x\times\left(-\frac{2}{x}(1-\ln x)\right)dx$

$$=1-\alpha(1-\ln\alpha)^2+2\int_\alpha^1(1-\ln x)\,dx$$
$$=1-\alpha(1-\ln\alpha)^2+2[2x-x\ln x]_\alpha^1$$
$$=1-\alpha(1-\ln\alpha)^2+2(2-(2\alpha-\alpha\ln\alpha))$$
$$\int_\alpha^1(1-\ln x)^2\,dx=1-\alpha+2\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2+4-4\alpha+2\alpha\ln\alpha$$
$$=5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

D'où : $\int_\alpha^1(1-\ln x)^2\,dx=5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

c) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ *l'aire à calculer, on a :* $\mathcal{A}(\alpha)=\int_\alpha^1|f(x)|\,dx$ *u.a* (*car* $\alpha<1$)

et comme $f(x)\geq 0$ *sur* $[\alpha;1]$ *; alors :* $\mathcal{A}(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx$ *u.a* $=\int_\alpha^1 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2\,dx$ *u.a* *Donc*

$\mathcal{A}(\alpha)=[2x-2\ln x]_\alpha^1+\int_\alpha^1(1-\ln x)^2\,dx$ *u.a*

$\mathcal{A}(\alpha)=2-2\alpha+2\ln\alpha+5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$ *u.a*

Donc $\mathcal{A}(\alpha)=7(1-\alpha)+(2+\alpha(4-\ln\alpha))\ln\alpha$ cm^2

7) $\begin{cases}u_0\in]\alpha;1[\\ u_{n+1}=f(u_n)\;;(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

a) Montrons par récurrence que ; pour tout $n\in\mathbb{N}$ *;* $\alpha<u_n<1$

- *Pour* $n=0$, *on a* $u_0\in]\alpha;1[$ *; donc* $\alpha<u_0<1$.
- *Soit* $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $\alpha<u_n<1$ *et montrons que* $\alpha<u_{n+1}<1$

D'après ce qui précède que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ *en particulier sur* $]\alpha;1[$ *; Et comme :* $\alpha<u_n<1$ *alors* $f(\alpha)<f(u_n)<f(1)$

On a $f(1)=1$ *et* $f(\alpha)=\alpha$, *donc* $\alpha<u_{n+1}<1$

●***Conclusion*** $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\alpha<u_n<1$

b) D'après la question 4) b) on a : $(\forall x\in]\alpha;1[)$; $f(x)\geq x$

et comme $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in]\alpha;1[$

alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $f(u_n)\geq u_n$ *d'où* $u_{n+1}\geq u_n$

D'où (u_n) *est croissante.*

c) (u_n) *est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.*

De plus on a : •) *f est continue sur* $[\alpha;1]$. •) $f([\alpha;1])\subset[\alpha;1]$.

•) $u_0\in[\alpha;1]$. •) $u_{n+1}=f(u_n)$ •) (u_n) *est convergente*

Donc si $l=\lim_{n\to+\infty}u_n$ *alors* l *est solution de l'équation* $f(x)=x$ *donc* $l=\alpha$ *ou* $l=1$ *et* $l\in[\alpha;1];1\in[\alpha;1]$

D'après la question précédente (u_n) *est croissante donc ;* $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\alpha<u_0\leq u_n<1$.

Donc $\alpha<u_0\leq l\leq 1$ *alors* $l=1$.

D'où : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$