Série d'exercices limites et continuité **Bac PC-SVT**

EXERCICE 1

Soit la fonction définie par : $f(x)=2x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}-x$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction

2. Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

EXERCICE 2

Déterminer la limite de la fonction f en x_0 *dans chacune des cas suivants :*

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ en $x_0=-2$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x}$ en $x_0=0$

3) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$ en $x_0=2$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ en $x_0=1$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$ en $x_0=1$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$ en $x_0=0$ et en $x_0=1$

EXERCICE 3

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur IR^* *et* $IR-\{-1\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ et

$g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ *et en déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)$ *et en déduire* $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} g\circ f(x)$

3. Calculer $g\circ f(x)$ *et retrouver* $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} g\circ f(x)$.

EXERCICE 4

Montrez que les limites suivantes existent et calculez leur valeur

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{4-x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x+1}{3x^2-x+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+\sin x}{x^2+3}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2}$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^2(x)-1}{1+\cos x}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x||x-2|}{x(x^2-x-2)}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin(\pi x)}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2(x)}$

EXERCICE 7

Déterminer, a l'aide des théorèmes de comparaison les limites en $+\infty$ *et en* $-\infty$ *de chacune des fonctions suivantes (si elles existent)*

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$

EXERCICE 8

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x-\sin x$

1) Montrer que pour tout x réel : $2x-1\le f(x)\le 2x+1$

2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ *et lorsque x tend vers* $-\infty$.

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur $D=[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout x de D, on a :

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) Démontrer que, pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$0\leq f(x)\leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$

EXERCICE 10

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=x-\sqrt{x}+4$

1) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$; $f(x)\geq 3\sqrt{x}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur IR par:

$f(x)=\dfrac{2x^3+2x+1}{x^2+1}$

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+1}$

2) Rechercher les asymptotes a la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par:

$f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. a. Montrer que la droite (Δ): $y=\dfrac{x}{2}-1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b. Montrer que pour tout x de $x\in[1;+\infty[$;

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}<1$

c. En déduirez la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ).

EXERCICE 13

On considère la fonction définie sur IR par :

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
La courbe $(\mathcal{C})$ admet-elle des asymptotes horizontales?

2. Démontrer que la droite A équation $y=-2x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x)=\dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$

1. Montrer que $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2-\sin x}\leq 1$.

2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x>1$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 15

Déterminer si elles existent les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}$ 2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

5) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE 16

Soit la fonction f définie sur $IR-\{-2\}$ par :

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ pour tout $(x\in IR-\{-2\})$.

2) Etudier le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$; à droite et à gauche en -2 .

EXERCICE 17

Montrer que la droite d'équation $y = x$ *est asymptote à la courbe représentative de la fonction* f *au voisinage de* $+\infty$

définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

EXERCICE 18

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ *est asymptote au voisinage de* $+\infty$ *à la courbe représentative de la fonction définies sur IR par :*

$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$